Dynamika

Adam Szmagliński

Instytut Fizyki PK

Kraków, 22.10.2016

Pierwsza Zasada Dynamiki Newtona

Każde ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, jeśli nie działają na nie żadne siły lub wypadkowa wszystkich sił jest równa zeru.

$$\vec{F}_w = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \mathrm{const}$$

Pierwsza Zasada Dynamiki Newtona

Każde ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, jeśli nie działają na nie żadne siły lub wypadkowa wszystkich sił jest równa zeru.

$$\vec{F}_w = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \mathrm{const}$$

Druga Zasada Dynamiki Newtona

Przyspieszenie ciała jest wprost proporcjonalne do wypadkowej siły działającej na to ciało i odwrotnie proporcjonalne do jego masy. Kierunek i zwrot przyspieszenia są zgodne z kierunkiem i zwrotem wektora siły.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m}$$

Trzecia Zasada Dynamiki Newtona

Gdy dwa ciała oddziałują na siebie wzajemnie, to siła wywierana przez pierwsze ciało na drugie (siła akcji) jest równa co do wartości i przeciwnie skierowana do siły, jaką ciało drugie wywiera na pierwsze (siła reakcji). Siły te nie równoważą się, gdyż każda przyłożona jest do innego ciała.

$$\vec{F}_{akcji} = -\vec{F}_{reakcji}$$

Przykłady zastosowania II Zasady Dynamiki

1. Rzut ukośny w jednorodnym polu grawitacyjnym

przyspieszenie ziemskie: $\vec{g} = [0, -g]$, $g \approx 9,81 \frac{m}{s^2}$
prędkość początkowa: $\vec{v}(t_0 = 0) = \vec{v}_0 = [v_{0x}, v_{0y}]$
$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \qquad v_{0y} = v_0 \sin\alpha$
położenie początkowe: $\vec{r}(t_0 = 0) = \vec{r}_0 = [x_0 = 0, y_0]$
$\vec{F}_w = \vec{Q} = m\vec{g} \qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m} = \frac{m\vec{g}}{m} = \vec{g}$

Przykłady zastosowania II Zasady Dynamiki

1. Rzut ukośny w jednorodnym polu grawitacyjnym

przyspieszenie ziemskie: $\vec{g} = [0, -g]$, $g \approx 9,81\ \frac{m}{s^2}$
prędkość początkowa: $\vec{v}\,(t_0 = 0) = \vec{v}_0 = [v_{0x}, v_{0y}]$
$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \qquad v_{0y} = v_0 \sin\alpha$
położenie początkowe: $\vec{r}\,(t_0 = 0) = \vec{r}_0 = [x_0 = 0, y_0]$
$\vec{F}_w = \vec{Q} = m\vec{g} \qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m} = \frac{m\vec{g}}{m} = \vec{g}$

$\vec{v}\,(t) = \int \vec{a}\,dt = \int \vec{g}\,dt = \vec{g}t + \vec{C}$
$\vec{v}\,(0) = \vec{C} = \vec{v}_0$
$\vec{v}\,(t) = \vec{g}t + \vec{v}_0 \quad \Rightarrow \quad v_x = v_{0x} \quad v_y = -gt + v_{0y}$

Przykłady zastosowania II Zasady Dynamiki

1. Rzut ukośny w jednorodnym polu grawitacyjnym

przyspieszenie ziemskie: $\vec{g} = [0, -g]$, $g \approx 9,81\ \frac{m}{s^2}$
prędkość początkowa: $\vec{v}\,(t_0 = 0) = \vec{v}_0 = [v_{0x}, v_{0y}]$
$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \qquad v_{0y} = v_0 \sin\alpha$
położenie początkowe: $\vec{r}\,(t_0 = 0) = \vec{r}_0 = [x_0 = 0, y_0]$
$\vec{F}_w = \vec{Q} = m\vec{g} \qquad \vec{a} = \frac{\vec{F}_w}{m} = \frac{m\vec{g}}{m} = \vec{g}$

$$\vec{v}\,(t) = \int \vec{a}\,dt = \int \vec{g}\,dt = \vec{g}t + \vec{C}$$
$$\vec{v}\,(0) = \vec{C} = \vec{v}_0$$
$$\vec{v}\,(t) = \vec{g}t + \vec{v}_0 \quad \Rightarrow \quad v_x = v_{0x} \quad v_y = -gt + v_{0y}$$

$$\vec{r}\,(t) = \int \vec{v}\,dt = \int (\vec{g}t + \vec{v}_0)\ dt = \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{C}$$
$$\vec{r}\,(0) = \vec{C} = \vec{r}_0$$
$$\vec{r}\,(t) = \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \quad \Rightarrow \quad x = v_{0x}t \quad y = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0$$

Zasięg rzutu ukośnego

czas ruchu: $y(t_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_k = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gy_0}}{g}$

$$\text{zasięg: } z = x(t_k) = v_{0x} \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gy_0}}{g} = \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{v_{0y}^2}}\right)$$

$$= \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{v_0^2 \sin^2 \alpha}}\right)$$

Dla $y_0 = 0$ zasięg: $z = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$
i jest maksymalny gdy $\sin(2\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Zasięg rzutu ukośnego

czas ruchu: $y(t_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_k = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gy_0}}{g}$

$$\text{zasięg: } z = x(t_k) = v_{0x} \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gy_0}}{g} = \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{v_{0y}^2}}\right)$$

$$= \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gy_0}{v_0^2 \sin^2 \alpha}}\right)$$

Dla $y_0 = 0$ zasięg: $z = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$
i jest maksymalny gdy $\sin(2\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Maksymalna wysokość

$v_y(t_w) = -gt_w + v_{0y} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_w = \frac{v_{0y}}{g}$

$y(t_w) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_{0y}}{g}\right)^2 + v_{0y} \frac{v_{0y}}{g} + y_0 = \frac{v_{0y}^2}{2g} + y_0 = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha + y_0$

2. Ruch z tarciem proporcjonalnym do prędkości (opór lepki)
$\vec{F} = -k\vec{v}$, $k = \mathrm{const} > 0$

prędkość początkowa: $v(0) = v_0$
położenie początkowe: $r(0) = 0$

2. Ruch z tarciem proporcjonalnym do prędkości (opór lepki)
$\vec{F} = -k\vec{v}$, $k = \mathrm{const} > 0$

prędkość początkowa: $v(0) = v_0$
położenie początkowe: $r(0) = 0$

Obliczenie prędkości

1. opuszczenie zapisu wektorowego: $m\vec{a} = \vec{F}_w \quad \Rightarrow \quad ma = -kv$
(ustalamy oś współrzędnej położenia o zwrocie zwykle zgodnym z prędkością początkową $\vec{v}_0$, składowe sił przeciwne do osi zapisujemy z przeciwnym znakiem)
2. separacja zmiennych: v, t: $m\frac{dv}{dt} = -kv \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\,dt$
(przekształcamy równanie aby np. wszystkie wystąpienia zmiennej v znajdowały się po lewej stronie równania, a zmiennej t po prawej)
3. wykonanie całkowania: $\ln|v| = -\frac{k}{m}t + C \quad \Rightarrow \quad v(t) = C'e^{-\frac{k}{m}t}$
4. podstawienie warunku początkowego:
$v(0) = C' = v_0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$

Obliczenie położenia

separacja zmiennych r, t: $\frac{dr}{dt} = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} \quad \Rightarrow \quad dr = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}\, dt$

wykonanie całkowania: $r(t) = -\frac{m}{k} v_0 e^{-\frac{k}{m}t} + C$

podstawienie warunku początkowego:

$r(0) = -\frac{mv_0}{k} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{mv_0}{k}$

$r(t) = \frac{mv_0}{k}\left[1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right]$

Obliczenie położenia

separacja zmiennych r, t: $\frac{dr}{dt} = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} \quad \Rightarrow \quad dr = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}\, dt$

wykonanie całkowania: $r(t) = -\frac{m}{k} v_0 e^{-\frac{k}{m}t} + C$

podstawienie warunku początkowego:

$r(0) = -\frac{mv_0}{k} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{mv_0}{k}$

$r(t) = \frac{mv_0}{k}\left[1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right]$

zasięg graniczny

$r_g = r(t \to \infty) = \frac{mv_0}{k}$

3. Ruch z tarciem proporcjonalnym do kwadratu prędkości (opór aerodynamiczny) $\vec{F} = -kv\vec{v}$, $k = \mathrm{const} > 0$

prędkość początkowa: $v(0) = v_0$
położenie początkowe: $r(0) = 0$

3. Ruch z tarciem proporcjonalnym do kwadratu prędkości (opór aerodynamiczny) $\vec{F} = -kv\vec{v}$, $k = \mathrm{const} > 0$

prędkość początkowa: $v(0) = v_0$
położenie początkowe: $r(0) = 0$

Obliczenie prędkości

1. opuszczenie zapisu wektorowego: $m\vec{a} = \vec{F}_w \quad \Rightarrow \quad ma = -kv^2$
2. separacja zmiennych: v, t: $m\frac{dv}{dt} = -kv^2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{dv}{v^2} = \frac{k}{m}\,dt$
3. wykonanie całkowania: $\frac{1}{v} = \frac{k}{m}t + C$
4. podstawienie warunku początkowego:

$\frac{1}{v_0} = C \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v} = \frac{kt}{m} + \frac{1}{v_0} \quad \Rightarrow \quad v(t) = \frac{mv_0}{kv_0 t + m}$

Obliczenie położenia

separacja zmiennych r, t: $\frac{dr}{dt} = \frac{mv_0}{kv_0 t + m} \quad \Rightarrow \quad dr = \frac{mv_0\, dt}{kv_0 t + m}$

wykonanie całkowania:

$r(t) = mv_0 \ln|kv_0 t + m| \frac{1}{kv_0} + C = \frac{m}{k} \ln|kv_0 t + m| + C$

podstawienie warunku początkowego:

$r(0) = \frac{m}{k} \ln|m| + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{m}{k} \ln|m|$

$r(t) = \frac{m}{k} \ln\left|\frac{kv_0}{m} t + 1\right|$

4. Rzut pionowy w jednorodnym polu grawitacyjnym z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości $\vec{F} = m\vec{g} - k\vec{v}$, $k = \mathrm{const} > 0$

prędkość początkowa: $v(0) = v_0$
położenie początkowe: $r(0) = 0$

4. Rzut pionowy w jednorodnym polu grawitacyjnym z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości $\vec{F} = m\vec{g} - k\vec{v}$, $k = \mathrm{const} > 0$

prędkość początkowa: $v(0) = v_0$
położenie początkowe: $r(0) = 0$

Obliczenie prędkości

1. opuszczenie zapisu wektorowego: $m\vec{a} = \vec{F}_w \quad \Rightarrow \quad ma = -mg - kv$
2. separacja zmiennych: v, t: $m\frac{dv}{dt} = -mg - kv \quad \Rightarrow \quad \frac{m\,dv}{kv+mg} = -dt$
3. wykonanie całkowania:

$m \ln|kv + mg| \frac{1}{k} = -t + C \quad \Rightarrow \quad kv + mg = C' e^{-\frac{k}{m}t}$

4. podstawienie warunku początkowego:

$kv_0 + mg = C' \quad \Rightarrow \quad v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$

4. Rzut pionowy w jednorodnym polu grawitacyjnym z oporem powietrza proporcjonalnym do prędkości $\vec{F} = m\vec{g} - k\vec{v}$, $k = \mathrm{const} > 0$

prędkość początkowa: $v(0) = v_0$
położenie początkowe: $r(0) = 0$

Obliczenie prędkości

1. opuszczenie zapisu wektorowego: $m\vec{a} = \vec{F}_w \quad \Rightarrow \quad ma = -mg - kv$
2. separacja zmiennych: v, t: $m\frac{dv}{dt} = -mg - kv \quad \Rightarrow \quad \frac{m\,dv}{kv+mg} = -dt$
3. wykonanie całkowania:

$m \ln|kv + mg| \frac{1}{k} = -t + C \quad \Rightarrow \quad kv + mg = C' e^{-\frac{k}{m}t}$

4. podstawienie warunku początkowego:

$kv_0 + mg = C' \quad \Rightarrow \quad v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}$

prędkość graniczna

$v_g = v(t \to \infty) = -\frac{mg}{k}$

Obliczenie położenia

separacja zmiennych r, t: $dr = \left[\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}\right] dt$

wykonanie całkowania: $r(t) = -\frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k}t + C$

podstawienie warunku początkowego:

$r(0) = -\frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)$

$r(t) = \frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)\left[1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right] - \frac{mg}{k}t$

Inercjalny układ odniesienia

to układ związany z ciałem poruszającym się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Inercjalny układ odniesienia

to układ związany z ciałem poruszającym się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Zasada względności (niezmienniczości) Galileusza

Prawa mechaniki są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Żadne zjawisko mechaniczne nie wyróżnia jednego układu spośród innych.

Inercjalny układ odniesienia

to układ związany z ciałem poruszającym się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Zasada względności (niezmienniczości) Galileusza

Prawa mechaniki są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia. Żadne zjawisko mechaniczne nie wyróżnia jednego układu spośród innych.

Załóżmy, że układ inercjalny U' porusza się względem drugiego układu inercjalnego U z prędkością $\vec{u}$. Dla czasu $t = 0$ początki układów współrzędnych się pokrywają.

Transformacja Galileusza

wiąże ze sobą współrzędne wektorów położenia danego punktu w obu układach: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$, a czas w obu układach płynie tak samo $t' = t$.

Transformacja Galileusza

wiąże ze sobą współrzędne wektorów położenia danego punktu w obu układach: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$, a czas w obu układach płynie tak samo $t' = t$.

Po zróżniczkowaniu współrzędnych względem czasu otrzymujemy:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$

Transformacja Galileusza

wiąże ze sobą współrzędne wektorów położenia danego punktu w obu układach: $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$, a czas w obu układach płynie tak samo $t' = t$.

Po zróżniczkowaniu współrzędnych względem czasu otrzymujemy:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$

Kolejne różniczkowanie daje przyspieszenie – niezmiennik transformacji:

$$\vec{a}' = \vec{a}$$

Nieinercjalny układ odniesienia

to układ związany z ciałem poruszającym się z przyspieszeniem.

Nieinercjalny układ odniesienia

to układ związany z ciałem poruszającym się z przyspieszeniem.

Siły bezwładności

W układzie nieinercjalnym pojawiają się dodatkowe siły pozorne zwane **siłami bezwładności**. Są one skierowane przeciwnie do przyspieszeń. Nazwa sił pozornych pochodzi stąd, że obserwator związany z układem inercjalnym ich nie dostrzega.

$$F' = ma'$$

Transformacja w układzie nieinercjalnym

Wprowadzamy dwa układy współrzędnych: *laboratoryjny* U (nieruchomy – związany z nami) oraz układ ruchomy U'.

Transformacja w układzie nieinercjalnym

Wprowadzamy dwa układy współrzędnych: *laboratoryjny* U (nieruchomy – związany z nami) oraz układ ruchomy U'.

Położenie danej cząstki w układzie *nieruchomym* określa wektor $\vec{r}$, w układzie ruchomym $\vec{r}'$:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

gdzie $\vec{r}_0$ oznacza położenie początku układu U' w układzie U.

Transformacja w układzie nieinercjalnym

Wprowadzamy dwa układy współrzędnych: *laboratoryjny* U (nieruchomy – związany z nami) oraz układ ruchomy U'.

Położenie danej cząstki w układzie *nieruchomym* określa wektor $\vec{r}$, w układzie ruchomym $\vec{r}'$:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

gdzie $\vec{r}_0$ oznacza położenie początku układu U' w układzie U.

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy odpowiednie przemieszczenia:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}' + d\vec{\varphi} \times \vec{r}'$$

Przemieszczenie $d\vec{r}_0$ odpowiada translacji układu U' (przesunięciu równoległemu), $d\vec{r}'$ odpowiada zmianie położenia cząstki w układzie U', $d\vec{\varphi} \times \vec{r}'$ związane jest z rotacją wektora $\vec{r}'$ (obrotem wokół osi).

Po podzieleniu przez czas trwania przemieszczenia dt otrzymujemy **transformację prędkości**:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}' + \vec{v}_u$$

gdzie $\vec{v}$ oznacza prędkość cząstki względem układu nieruchomego, $\vec{v}'$ – względem ruchomego, a $\vec{v}_u = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ *prędkość unoszenia* złożoną z *prędkości translacji* $\vec{v}_0$ i *prędkości rotacji* $\vec{\omega} \times \vec{r}'$, $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ jest prędkością kątową obrotu układu U'.

Po podzieleniu przez czas trwania przemieszczenia dt otrzymujemy **transformację prędkości**:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}' + \vec{v}_u$$

gdzie $\vec{v}$ oznacza prędkość cząstki względem układu nieruchomego, $\vec{v}'$ – względem ruchomego, a $\vec{v}_u = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'$ *prędkość unoszenia* złożoną z *prędkości translacji* $\vec{v}_0$ i *prędkości rotacji* $\vec{\omega} \times \vec{r}'$, $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ jest prędkością kątową obrotu układu U'.

Poprzez zróżniczkowanie transformacji prędkości otrzymujemy:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_0}{dt} + \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{v}'\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}'\right)$$

gdzie $d\vec{v}'$ odpowiada zmianie prędkości cząstki mierzonej w układzie U', $d\vec{\varphi} \times \vec{v}'$ odpowiada obrotowi wektora prędkości.

Transformacja przyspieszenia

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$$

Transformacja przyspieszenia

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$$

$\vec{r}'$ można rozłożyć na składowe równoległą i prostopadłą do osi obrotu $\vec{\omega}$: $\vec{r}' = \vec{r}'_{\parallel} + \vec{r}'_{\perp}$.

Transformacja przyspieszenia

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$$

$\vec{r}'$ można rozłożyć na składowe równoległą i prostopadłą do osi obrotu $\vec{\omega}$: $\vec{r}' = \vec{r}'_{\parallel} + \vec{r}'_{\perp}$.

Przyspieszenie dośrodkowe

$$\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right) = \vec{\omega} \times \left(\underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}'_{\parallel}}_{0} + \vec{\omega} \times \vec{r}'_{\perp}\right) = \left(\underbrace{\vec{\omega} \cdot \vec{r}'_{\perp}}_{0}\right) \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r}'_{\perp} = -\omega^2 \vec{r}'_{\perp}$$

$-\omega^2 \vec{r}'_{\perp} = \vec{a}_n$ jest *przyspieszeniem dośrodkowym* wynikającym z obrotu cząstki wraz z układem.

Przyspieszenie kątowe $\vec{\varepsilon}$

układu U' można rozłożyć na dwie składowe: równoległą i prostopadłą do prędkości kątowej $\vec{\omega} = \omega \hat{i}_\omega$:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\left(\omega \hat{i}_\omega\right)}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\hat{i}_\omega + \omega \frac{d\hat{i}_\omega}{dt} = \vec{\varepsilon}_{\parallel} + \vec{\varepsilon}_{\perp}$$

$$\hat{i}_\omega = \mathrm{const} \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_{\parallel} \qquad \omega \equiv |\omega| = \mathrm{const} \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_{\perp}$$

Przyspieszenie kątowe $\vec{\varepsilon}$

układu U' można rozłożyć na dwie składowe: równoległą i prostopadłą do prędkości kątowej $\vec{\omega} = \omega \hat{i}_\omega$:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\left(\omega \hat{i}_\omega\right)}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\hat{i}_\omega + \omega \frac{d\hat{i}_\omega}{dt} = \vec{\varepsilon}_{\parallel} + \vec{\varepsilon}_{\perp}$$

$$\hat{i}_\omega = \mathrm{const} \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_{\parallel} \qquad \omega \equiv |\omega| = \mathrm{const} \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_{\perp}$$

Przyspieszenie styczne

związane z obrotem układu $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}' = \vec{a}_t$

Przyspieszenie kątowe $\vec{\varepsilon}$

układu U' można rozłożyć na dwie składowe: równoległą i prostopadłą do prędkości kątowej $\vec{\omega} = \omega \hat{i}_\omega$:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\left(\omega \hat{i}_\omega\right)}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\hat{i}_\omega + \omega \frac{d\hat{i}_\omega}{dt} = \vec{\varepsilon}_\parallel + \vec{\varepsilon}_\perp$$

$$\hat{i}_\omega = \mathrm{const} \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_\parallel \qquad \omega \equiv |\omega| = \mathrm{const} \Rightarrow \vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}_\perp$$

Przyspieszenie styczne

związane z obrotem układu $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}' = \vec{a}_t$

Przyspieszenie Coriolisa

$2\vec{\omega} \times \vec{v}' = \vec{a}_C$

Transformacja przyspieszenia

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_u + \vec{a}_C$$

gdzie $\vec{a}_u = \vec{a}_0 + \vec{a}_n + \vec{a}_t$ jest przyspieszeniem unoszenia wektora $\vec{a}'$ przez układ U', ponieważ przedstawia ono przyspieszenie względem układu U cząstki spoczywającej w układzie U'.

Ziemia jako układ odniesienia

W wielu zagadnieniach dynamiki Ziemię traktujemy jako układ inercjalny. Wykonuje ona jednak złożone ruchy obrotowe: biegnie z prędkością $29\,km/s$ po elipsie dookoła Słońca i wiruje wokół własnej osi z prędkością kątową $\omega = 2\pi/T = 7,25 \cdot 10^{-5}\,s^{-1}$.

Ziemia jako układ odniesienia

W wielu zagadnieniach dynamiki Ziemię traktujemy jako układ inercjalny. Wykonuje ona jednak złożone ruchy obrotowe: biegnie z prędkością $29\,km/s$ po elipsie dookoła Słońca i wiruje wokół własnej osi z prędkością kątową $\omega = 2\pi/T = 7,25 \cdot 10^{-5}\,s^{-1}$.

Ruch wirowy

W układzie związanym z Ziemią zapisujemy równanie ruchu pod działaniem siły $\vec{F}$ w postaci: $m\vec{a}' = \vec{F}$.
Gdy uwzględnimy nieinercjalność tego układu związaną z ruchem wirowym Ziemi otrzymujemy: $m\vec{a}' = \vec{F} + m\omega^2\vec{r}'_\perp - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$
gdzie $\vec{r}'$ jest promieniem wodzącym cząstki w układzie sztywno związanym z Ziemią, o początku w jej środku, $\vec{v}'$ prędkością cząstki w tym układzie.

Ziemia jako układ odniesienia

W wielu zagadnieniach dynamiki Ziemię traktujemy jako układ inercjalny. Wykonuje ona jednak złożone ruchy obrotowe: biegnie z prędkością $29\,km/s$ po elipsie dookoła Słońca i wiruje wokół własnej osi z prędkością kątową $\omega = 2\pi/T = 7,25 \cdot 10^{-5}\,s^{-1}$.

Ruch wirowy

W układzie związanym z Ziemią zapisujemy równanie ruchu pod działaniem siły $\vec{F}$ w postaci: $m\vec{a}' = \vec{F}$.
Gdy uwzględnimy nieinercjalność tego układu związaną z ruchem wirowym Ziemi otrzymujemy: $m\vec{a}' = \vec{F} + m\omega^2\vec{r}'_\perp - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$
gdzie $\vec{r}'$ jest promieniem wodzącym cząstki w układzie sztywno związanym z Ziemią, o początku w jej środku, $\vec{v}'$ prędkością cząstki w tym układzie.

Siła przyciągania przez Słońce

znosi się z siłą bezwładności związaną z przyspieszeniem Ziemi względem Słońca.

Wpływ na przyspieszenie Ziemskie

Aby ocenić błąd, jaki popełniamy uważając Ziemię za uklad inercjalny, czyli pomijając siłę odśrodkową i siłę Coriolisa, porównujemy ich wartości z siłą ciężkości.

Wpływ na przyspieszenie Ziemskie

Aby ocenić błąd, jaki popełniamy uważając Ziemię za uklad inercjalny, czyli pomijając siłę odśrodkową i siłę Coriolisa, porównujemy ich wartości z siłą ciężkości.

Siła odśrodkowa

na powierzchni Ziemi $r' = R$:

$$F_r = m\omega^2 R \sin \sphericalangle \left\langle \vec{\omega}; \vec{r}' \right\rangle = m\omega^2 R \cos \varphi$$

gdzie φ jest szerokością geograficzną.
Poprzez podzielenie maksymalnej wartości siły odśrodkowej przez ciężar ciała otrzymujemy: $m\omega^2 R/(mg) \approx 0,0034$

Wpływ na przyspieszenie Ziemskie

Aby ocenić błąd, jaki popełniamy uważając Ziemię za uklad inercjalny, czyli pomijając siłę odśrodkową i siłę Coriolisa, porównujemy ich wartości z siłą ciężkości.

Siła odśrodkowa

na powierzchni Ziemi $r' = R$:

$$F_r = m\omega^2 R \sin \sphericalangle \left\langle \vec{\omega}; \vec{r}' \right\rangle = m\omega^2 R \cos \varphi$$

gdzie φ jest szerokością geograficzną.
Poprzez podzielenie maksymalnej wartości siły odśrodkowej przez ciężar ciała otrzymujemy: $m\omega^2 R/(mg) \approx 0,0034$

Spłaszczenie Ziemi

wzdłuż jej osi obrotu około 21 km powoduje wzrost różnicy mierzonego przyspieszenia ziemskiego na biegunach i równiku: $g_B - g_R \approx 0,0519\, m/s^2$

Wpływ siły Coriolisa

Siła Coriolisa

$F_C = 2m\omega v' \sin \sphericalangle \langle \vec{\omega}; \vec{v}' \rangle$ jest największa, gdy ciało porusza się prostopadle do kierunku ziemskiej osi. Aby siła Coriolisa była porównywalna z siłą ciężkości, to musiało by się poruszać z prędkością $v' = 66\, km/s$.

Wpływ siły Coriolisa

Siła Coriolisa

$F_C = 2m\omega v' \sin \sphericalangle \langle \vec{\omega}; \vec{v}' \rangle$ jest największa, gdy ciało porusza się prostopadle do kierunku ziemskiej osi. Aby siła Coriolisa była porównywalna z siłą ciężkości, to musiało by się poruszać z prędkością $v' = 66\, km/s$.

Współczesne lotnictwo musi uwzględniać siłę Coriolisa w nawigacji.

Wpływ siły Coriolisa

Siła Coriolisa

$F_C = 2m\omega v' \sin \sphericalangle \langle \vec{\omega}; \vec{v}' \rangle$ jest największa, gdy ciało porusza się prostopadle do kierunku ziemskiej osi. Aby siła Coriolisa była porównywalna z siłą ciężkości, to musiało by się poruszać z prędkością $v' = 66\, km/s$.

Współczesne lotnictwo musi uwzględniać siłę Coriolisa w nawigacji.

Tory ciał spadających swobodnie

są odchylane od pionu w kierunku wschodnim przez siłę Coriolisa.

Wpływ siły Coriolisa

Siła Coriolisa

$F_C = 2m\omega v' \sin \sphericalangle \langle \vec{\omega}; \vec{v}' \rangle$ jest największa, gdy ciało porusza się prostopadle do kierunku ziemskiej osi. Aby siła Coriolisa była porównywalna z siłą ciężkości, to musiało by się poruszać z prędkością $v' = 66\, km/s$.

Współczesne lotnictwo musi uwzględniać siłę Coriolisa w nawigacji.

Tory ciał spadających swobodnie

są odchylane od pionu w kierunku wschodnim przez siłę Coriolisa.

Tory ciał poruszających się równolegle do powierzchni Ziemi

są odchylane w prawo na półkuli północnej, a w lewo na południowej. Wynika to z zastosowania reguły śruby prawoskrętnej dla siły Coriolisa.

Masy powietrza płynące nad Ziemią

od wyżu do niżu są odchylane przez siłę Coriolisa, co prowadzi do pojawienia się wirów opływających ośrodki niżowe przeciwnie do ruchu wskazówek zegara na półkuli północnej, a na południowej zgodnie.

Masy powietrza płynące nad Ziemią

od wyżu do niżu są odchylane przez siłę Coriolisa, co prowadzi do pojawienia się wirów opływających ośrodki niżowe przeciwnie do ruchu wskazówek zegara na półkuli północnej, a na południowej zgodnie.

Wpływ przyspieszenia Coriolisa musi być uwzględniany przy obliczaniu torów pocisków, rakiet i sztucznych satelitów. Na półkuli północnej powoduje ono silniejsze podmywanie prawych brzegów rzek i np. zużywanie torów kolejowych.

Masy powietrza płynące nad Ziemią

od wyżu do niżu są odchylane przez siłę Coriolisa, co prowadzi do pojawienia się wirów opływających ośrodki niżowe przeciwnie do ruchu wskazówek zegara na półkuli północnej, a na południowej zgodnie.

Wpływ przyspieszenia Coriolisa musi być uwzględniany przy obliczaniu torów pocisków, rakiet i sztucznych satelitów. Na półkuli północnej powoduje ono silniejsze podmywanie prawych brzegów rzek i np. zużywanie torów kolejowych.

Wahadło Foucaulta

Pod działaniem siły Coriolisa płaszczyzna wahań wahadła matematycznego obraca się z prędkością kątową równą lokalnej składowej prędkości obrotu Ziemi: $\omega_F = \omega_Z \sin\varphi$.
Obserwator inercjalny powie, że to płaszczyzna horyzontu obraca się pod nieruchomą płaszczyzną wahadła. Obrót płaszczyzny drgań *wahadła Foucaulta* w Polsce wynosi od 30 do 32 godzin.

Siły zachowawcze

Parametry stanu

Stan mechaniczny cząstki określają dwie wielkości:
położenie $\vec{r}$ i prędkość $\vec{v}$, zwane parametrami stanu.

Siły zachowawcze

Parametry stanu

Stan mechaniczny cząstki określają dwie wielkości:
położenie $\vec{r}$ i prędkość $\vec{v}$, zwane parametrami stanu.

Praca

siły działającej na drodze pomiędzy punktami A i B:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m\int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}\, mv^2\Big|_A^B = \Delta E_K$$

Energia kinetyczna jest *funkcją stanu*: $E_K = \frac{1}{2}mv^2$.

Pole sił zachowawczych

to pole w którym praca zależy tylko od położenia początkowego i końcowego.

Pole sił zachowawczych

to pole w którym praca zależy tylko od położenia początkowego i końcowego.

Praca sił zachowawczych nie zależy od wyboru drogi: $W = \oint \vec{F}_{zach} \cdot d\vec{r} = 0$

Pole sił zachowawczych

to pole w którym praca zależy tylko od położenia początkowego i końcowego.

Praca sił zachowawczych nie zależy od wyboru drogi: $W = \oint \vec{F}_{zach} \cdot d\vec{r} = 0$

Przykłady pól zachowawczych

pole centralne, w którym kierunek działania siły przechodzi przez nieruchome centrum, a jej wartość zależy tylko od odległości od tego centrum,

pole jednorodne, w którym kierunek i zwrot działającej siły jest ten sam w każdym punkcie.

Pole sił zachowawczych

to pole w którym praca zależy tylko od położenia początkowego i końcowego.

Praca sił zachowawczych nie zależy od wyboru drogi: $W = \oint \vec{F}_{zach} \cdot d\vec{r} = 0$

Przykłady pól zachowawczych

pole centralne, w którym kierunek działania siły przechodzi przez nieruchome centrum, a jej wartość zależy tylko od odległości od tego centrum,

pole jednorodne, w którym kierunek i zwrot działającej siły jest ten sam w każdym punkcie.

Przykłady pól niezachowawczych

siły tarcia, opru wiskotycznego ($\vec{F} = -b\vec{v}$), oporu aerodynamicznego.

Energia potencjalna

Jeśli $\vec{F}$ jest siłą zachowawczą, to energia potencjalna ciała w punkcie B, względem punktu A:

$$E_P(B) = E_P(A) - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Energia potencjalna

Jeśli $\vec{F}$ jest siłą zachowawczą, to energia potencjalna ciała w punkcie B, względem punktu A:

$$E_P(B) = E_P(A) - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Siła pola

Jeśli cząstka podlega elementarnemu przemieszczeniu dx,
to elementarna zmiana jej energii potencjalnej: $dE_P = -F_x\, dx$.
Stąd siła danego pola: $\vec{F} = -\mathrm{grad}\, E_P$.

Energia potencjalna

Jeśli $\vec{F}$ jest siłą zachowawczą, to energia potencjalna ciała w punkcie B, względem punktu A:

$$E_P(B) = E_P(A) - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Siła pola

Jeśli cząstka podlega elementarnemu przemieszczeniu dx,
to elementarna zmiana jej energii potencjalnej: $dE_P = -F_x\, dx$.
Stąd siła danego pola: $\vec{F} = -\mathrm{grad}\, E_P$.

Potencjał pola

to stosunek energii potencjalnej ciała w danym polu do ładunku (masy) tego ciała.

$$V = \frac{E_P}{q} \qquad \text{lub} \qquad V = \frac{E_P}{m}$$

Powierzchnia ekwipotencjalna

to powierzchnia złożona z punktów o jednakowym potencjale.

Powierzchnia ekwipotencjalna

to powierzchnia złożona z punktów o jednakowym potencjale.

Natężenie pola

to stosunek siły pola działającej na *ciało próbne* do ładunku (masy) tego ciała. **Ładunek próbny** to ładunek dodatni, na tyle mały aby nie zakłócał mierzonego pola.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \qquad \text{lub} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Dla każdej funkcji skalarnej V klasy C^2 zachodzi:
$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,V = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} E_P = -\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$
Natężenie pola: $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,V$.

Dla każdej funkcji skalarnej V klasy C^2 zachodzi:
$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,V = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0$
$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} E_P = -\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$
Natężenie pola: $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,V$.

Warunki Schwartza

na to, aby pole $\vec{E}$ posiadało potencjał:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \qquad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y}$$

Prawo Gaussa

Elementowi powierzchni *ds* można przyporządkować wektor o kierunku prostopadłym do niego i zwrocie skierowanym na zewnątrz powierzchni zamkniętej.

Prawo Gaussa

Elementowi powierzchni ds można przyporządkować wektor o kierunku prostopadłym do niego i zwrocie skierowanym na zewnątrz powierzchni zamkniętej.

Strumień pola

przechodzący przez powierzchnię o polu S: $\Psi = \int\limits_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Prawo Gaussa

Elementowi powierzchni ds można przyporządkować wektor o kierunku prostopadłym do niego i zwrocie skierowanym na zewnątrz powierzchni zamkniętej.

Strumień pola

przechodzący przez powierzchnię o polu S: $\Psi = \int\limits_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Prawo Gaussa

Całkowity strumień pola przechodzący przez zamkniętą powierzchnię jest proporcjonalny do ładunku (masy) zawartego w obszarze zamkniętym tą powierzchnią.

$$\Psi = \frac{Q}{\varepsilon} \qquad \text{lub} \qquad \Psi = \frac{M}{k}$$

ε – przenikalność elektryczna ośrodka

Prawo Coulomba, Prawo Powszechnego Ciążenia

W przypadku ładunku (masy) rozłożonego równomiernie i sferycznie symetrycznie względem obejmującej go sfery o promieniu R, otrzymujemy równanie na natężenie pola na powierzchni tej sfery:

$\Psi = 4\pi R^2 E = \frac{Q}{\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{R^2}$ stąd siła: $F = qE = k\frac{qQ}{R^2}$

$\Psi = 4\pi R^2 E = \frac{M}{k'} \Rightarrow E = \frac{1}{4\pi k'}\frac{M}{R^2}$ $F = mE = G\frac{mM}{R^2}$

Światłość (gęstość kątowa strumienia świetlnego) I

w danym kierunku to stosunek strumienia energii promieniowania widzialnego Φ do wielkości kąta bryłowego ω, jakiemu on odpowiada:

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega} \quad \Rightarrow \quad d\Phi = I\, d\omega$$

Punktowe źródło światła o *światłości* we wszystkich kierunkach równej jednej kandeli wysyła na każdy steradian *kąta bryłowego strumień świetlny* równy jednemu lumenowi: $1\,lm = 1\,cd \cdot 1\,sr$.

W tych warunkach całkowity strumień świetlny wysyłany przez źródło wynosi $4\pi\,lm$.

Światłość (gęstość kątowa strumienia świetlnego) I

w danym kierunku to stosunek strumienia energii promieniowania widzialnego Φ do wielkości kąta bryłowego ω, jakiemu on odpowiada:

$$I = \frac{d\Phi}{d\omega} \quad \Rightarrow \quad d\Phi = I\, d\omega$$

Punktowe źródło światła o *światłości* we wszystkich kierunkach równej jednej kandeli wysyła na każdy steradian *kąta bryłowego strumień świetlny* równy jednemu lumenowi: $1\,lm = 1\,cd \cdot 1\,sr$.

W tych warunkach całkowity strumień świetlny wysyłany przez źródło wynosi $4\pi\,lm$.

Niejednakowa wrażliwość oka ludzkiego na różne barwy światła decyduje o tym, że dla różnych źródeł monochromatycznych występuje różny stosunek odpowiadających sobie lumenów i watów. Dla światła o długości $555\,nm$, odpowiadającej największej wrażliwości oka mamy najkorzystniejszy stosunek $620\,lm/W$.

Natężenie oświetlenia E

wyraża strumień świetlny przypadający na jednostkę powierzchni: $E = \frac{d\Phi}{dS}$.
Natężenie oświetlenia równe jednemu luksowi panuje na powierzchni kuli o promieniu $1\,m$, w środku której znajduje się punktowe źródło o światłości jednakowej we wszystkich kierunkach i równej $1\,cd$: $\quad 1\,lx = 1\,\frac{lm}{m^2}$.

Energia potencjalna

Energię potencjalną w punkcie A oraz położenie tego punktu wybieramy tak, aby postać wzoru była najbardziej dogodna.

np. energia potencjalna grawitacyjna:

$$E_P(B) = E_P(\infty) - \int_{\infty}^{B} \vec{F}_{zew} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R} -G\frac{mM}{r^2}\,dr = GmM\int_{\infty}^{R}\frac{dr}{r^2} = -G\frac{mM}{R}$$

lub elektrostatyczna:

$$E_P(B) = E_P(\infty) - \int_{\infty}^{B} \vec{F}_{zew} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R} k\frac{qQ}{r^2}\,dr = -kqQ\int_{\infty}^{R}\frac{dr}{r^2} = k\frac{qQ}{R}$$

Energia potencjalna

Energię potencjalną w punkcie A oraz położenie tego punktu wybieramy tak, aby postać wzoru była najbardziej dogodna.

np. energia potencjalna grawitacyjna:

$$E_P(B) = E_P(\infty) - \int_{\infty}^{B} \vec{F}_{zew} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R} -G\frac{mM}{r^2}\,dr = GmM\int_{\infty}^{R}\frac{dr}{r^2} = -G\frac{mM}{R}$$

lub elektrostatyczna:

$$E_P(B) = E_P(\infty) - \int_{\infty}^{B} \vec{F}_{zew} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{R} k\frac{qQ}{r^2}\,dr = -kqQ\int_{\infty}^{R}\frac{dr}{r^2} = k\frac{qQ}{R}$$

Energia potencjalna grawitacyjna na niewielkiej wysokości h

ponad Ziemią liczona względem powierzchni Ziemi:

$$\begin{aligned} E_P(h) &= E_P(R_z + h) - E_P(R_z) = -GmM\left(\frac{1}{R_z + h} - \frac{1}{R_z}\right) \\ &= GmM\frac{h}{(R_z + h)\,R_z} \approx G\frac{mM}{R_z^2}h = F_g h = mgh \end{aligned}$$

Energia mechaniczna cząstki

jest sumą jej energii kinetycznej i potencjalnej: $E_M = E_K + E_P$

Energia mechaniczna cząstki

jest sumą jej energii kinetycznej i potencjalnej: $E_M = E_K + E_P$

Zasada Zachowania Energii Mechanicznej

Energia mechaniczna podczas ruchu cząstki pod działaniem siły zachowawczej pozostaje stała.

Energia mechaniczna cząstki

jest sumą jej energii kinetycznej i potencjalnej: $E_M = E_K + E_P$

Zasada Zachowania Energii Mechanicznej

Energia mechaniczna podczas ruchu cząstki pod działaniem siły zachowawczej pozostaje stała.

Jeśli podczas ruchu ciała występuje siła tarcia, to energia mechaniczna ulega zmianie na energię wewnętrzną ciał trących.

Energia mechaniczna cząstki

jest sumą jej energii kinetycznej i potencjalnej: $E_M = E_K + E_P$

Zasada Zachowania Energii Mechanicznej

Energia mechaniczna podczas ruchu cząstki pod działaniem siły zachowawczej pozostaje stała.

Jeśli podczas ruchu ciała występuje siła tarcia, to energia mechaniczna ulega zmianie na energię wewnętrzną ciał trących.

Całkowita energia układu

się nie zmienia. Energia danego rodzaju może zmieniać się w inny.

Pęd ciała

to iloczyn jego masy i prędkości: $\vec{p} = m\vec{v}$

Pęd ciała

to iloczyn jego masy i prędkości: $\vec{p} = m\vec{v}$

Uogólniona Druga Zasada Dynamiki

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Pęd ciała

to iloczyn jego masy i prędkości: $\vec{p} = m\vec{v}$

Uogólniona Druga Zasada Dynamiki

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}}$$

Pęd ciała

to iloczyn jego masy i prędkości: $\vec{p} = m\vec{v}$

Uogólniona Druga Zasada Dynamiki

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}}$$

Zasada Zachowania Pędu

Jeśli siła działająca na układ jest równa zeru, to jego pęd nie ulega zmianie.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \mathrm{const}$$