Dynamika Bryły Sztywnej

Adam Szmagliński

Instytut Fizyki PK

Kraków, 27.10.2016

Podstawy dynamiki bryły sztywnej

Bryła sztywna

to układ cząstek o niezmiennych wzajemnych odległościach.

Podstawy dynamiki bryły sztywnej

Bryła sztywna

to układ cząstek o niezmiennych wzajemnych odległościach.

Podstawowe znaczenie dla opisu ruchu układu jako całości jest ruch szczególnego punktu - *środka masy* układu.

Podstawy dynamiki bryły sztywnej

Bryła sztywna

to układ cząstek o niezmiennych wzajemnych odległościach.

Podstawowe znaczenie dla opisu ruchu układu jako całości jest ruch szczególnego punktu - *środka masy* układu.

Środek masy

reprezentuje układ, więc pod wpływem wypadkowej sił zewnętrznych porusza się jak cząstka o masie równej masie układu:

$$\vec{F} = m\vec{a}_s = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \quad \text{gdzie} \quad m = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

stąd przyspieszenie środka masy: $\vec{a}_s = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i$

Poprzez kolejne całkowania otrzymujemy prędkość i położenie środka masy układu:

$$\vec{v}_s = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \qquad \vec{r}_s = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

Poprzez kolejne całkowania otrzymujemy prędkość i położenie środka masy układu:

$$\vec{v}_s = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \qquad \vec{r}_s = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

Moment masy

względem początku układu: $m_i \vec{r}_i$

Poprzez kolejne całkowania otrzymujemy prędkość i położenie środka masy układu:

$$\vec{v}_s = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \qquad \vec{r}_s = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

Moment masy

względem początku układu: $m_i \vec{r}_i$

Pęd środka masy jest równy pędowi układu: $\vec{p}_s = m\vec{v}_s = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \vec{p}$

Poprzez kolejne całkowania otrzymujemy prędkość i położenie środka masy układu:

$$\vec{v}_s = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \qquad \vec{r}_s = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

Moment masy

względem początku układu: $m_i \vec{r}_i$

Pęd środka masy jest równy pędowi układu: $\vec{p}_s = m\vec{v}_s = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \vec{p}$

Wypadkowa sił zewnętrznych: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_s}{dt}$

Zasada zachowania pędu środka masy

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_s = \mathrm{const}$$

Zasada zachowania pędu środka masy

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_s = \mathrm{const}$$

Wtedy środek masy układu odosobnionego porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, niezależnie od tego jak poruszają się inne cząstki układu.

Zasada zachowania pędu środka masy

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_s = \mathrm{const}$$

Wtedy środek masy układu odosobnionego porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, niezależnie od tego jak poruszają się inne cząstki układu.

Moment pędu

cząstki względem przechodzącej przez początek układu współrzędnych osi prostopadłej do płaszczyzny utworzonej przez wektory pędu i położenia:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Zasada zachowania pędu środka masy

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_s = \mathrm{const}$$

Wtedy środek masy układu odosobnionego porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, niezależnie od tego jak poruszają się inne cząstki układu.

Moment pędu

cząstki względem przechodzącej przez początek układu współrzędnych osi prostopadłej do płaszczyzny utworzonej przez wektory pędu i położenia:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Moment siły

działającej na cząstkę: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Moment pędu i moment siły

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)}{dt} = \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} = \vec{r}\times\vec{F} + m\underbrace{\vec{v}\times\vec{v}}_{0} = \vec{M}$$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Moment pędu i moment siły

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)}{dt} = \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} = \vec{r}\times\vec{F} + m\underbrace{\vec{v}\times\vec{v}}_{0} = \vec{M}$$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Zasada Zachowania Momentu Pędu

Jeżeli moment działających na układ sił jest równy zeru, to *moment pędu* układu pozostaje stały:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \mathrm{const}$$

Moment bezwładności

Z transformacji prędkości układu obracającego się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ wokół środka masy do laboratoryjnego prędkość i-tej cząstki:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_s + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$\vec{v}_s$ – prędkość środka masy
$\vec{r}_i$ – położenie cząstki w układzie środka masy

Moment bezwładności

Z transformacji prędkości układu obracającego się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ wokół środka masy do laboratoryjnego prędkość i-tej cząstki:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_s + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$\vec{v}_s$ – prędkość środka masy
$\vec{r}_i$ – położenie cząstki w układzie środka masy

Energia kinetyczna jest sumą energii cząstek:
$E_K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{v}_s + \vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)^2$

Moment bezwładności

Z transformacji prędkości układu obracającego się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ wokół środka masy do laboratoryjnego prędkość i-tej cząstki:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_s + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$\vec{v}_s$ – prędkość środka masy
$\vec{r}_i$ – położenie cząstki w układzie środka masy

Energia kinetyczna jest sumą energii cząstek:
$E_K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{v}_s + \vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)^2$

$$\begin{aligned} \left(\vec{v}_s + \vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)^2 &= v_s^2 + 2\vec{v}_s \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right) + \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right)^2 \\ &= v_s^2 + 2\vec{\omega} \cdot \left(\vec{r}_i \times \vec{v}_s\right) + \omega^2 r_i^2 \sin^2 \sphericalangle \langle \vec{\omega}; \vec{r}_i \rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_K &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_s^2 + \vec{\omega}\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right)}_{0}\times\vec{v}_s + \frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \sin^2 \sphericalangle\langle\vec{\omega};\vec{r}_i\rangle \\
&= \frac{1}{2}mv_s^2 + \frac{1}{2}I\omega^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_K &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_s^2 + \vec{\omega}\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right)}_{0}\times\vec{v}_s + \frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \sin^2 \sphericalangle\langle\vec{\omega};\vec{r}_i\rangle \\
&= \frac{1}{2}mv_s^2 + \frac{1}{2}I\omega^2
\end{aligned}
$$

Moment bezwładności

bryły względem danej osi jest sumą iloczynów mas cząstek i kwadratów ich odległości od osi.

$$
\begin{aligned}
E_K &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_s^2 + \vec{\omega}\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i\right)}_{0}\times\vec{v}_s + \frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \sin^2 \sphericalangle\langle\vec{\omega};\vec{r}_i\rangle \\
&= \frac{1}{2}mv_s^2 + \frac{1}{2}I\omega^2
\end{aligned}
$$

Moment bezwładności

bryły względem danej osi jest sumą iloczynów mas cząstek i kwadratów ich odległości od osi.

Moment bezwładności bryły ciągłej obliczamy, zastępując masy cząstek elementami masy ciała: $dm = \rho\, dV$

$$
I = \int_m r^2\, dm = \int_V \rho r^2\, dV
$$

Przykłady obliczeń momentu bezwładności

Moment bezwładności jednorodnego walca względem jego osi:

$$I = \int_0^R r^2 \rho h \, 2\pi r \, dr = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 \, dr = \frac{1}{2}\pi\rho h R^4 = \frac{1}{2} m R^2$$

Przykłady obliczeń momentu bezwładności

Moment bezwładności jednorodnego walca względem jego osi:

$$I = \int_0^R r^2 \rho h \, 2\pi r \, dr = 2\pi\rho h \int_0^R r^3 \, dr = \tfrac{1}{2}\pi\rho h R^4 = \tfrac{1}{2} m R^2$$

Moment bezwładności jednorodnej kuli:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R r^2 \rho 2\sqrt{R^2 - r^2} 2\pi r \, dr = 4\pi\rho \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r^3 \, dr = \{R^2 - r^2 = t\} \\ &= 2\pi\rho \int_{R^2}^0 \left(t - R^2\right) \sqrt{t} \, dt = 2\pi\rho \left[\frac{2}{5} t^{5/2} - \frac{2}{3} R^2 t^{3/2}\right]_{R^2}^0 \\ &= 4\pi\rho \left(\frac{1}{3} R^5 - \frac{1}{5} R^5\right) = \frac{8}{15}\pi\rho R^5 = \frac{2}{5} m R^2 \end{aligned}$$

Moment bezwładności cienkiego, jednorodnego pręta względem prostopadłej do niego osi przechodzącej przez jego koniec i środek:

$$I_K = \int_0^L \gamma r^2 \, dr = \gamma \, \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^L = \frac{1}{3} m L^2 \qquad \gamma = \frac{m}{L}$$

$$I_{\text{Ś}} = \int_{-L/2}^{L/2} \gamma r^2 \, dr = \gamma \, \frac{1}{3} r^3 \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} m L^2$$

Moment bezwładności cienkiego, jednorodnego pręta względem prostopadłej do niego osi przechodzącej przez jego koniec i środek:

$$I_K = \int_0^L \gamma r^2\, dr = \gamma\, \tfrac{1}{3} r^3 \Big|_0^L = \tfrac{1}{3} m L^2 \qquad \gamma = \frac{m}{L}$$

$$I_{\acute{S}} = \int_{-L/2}^{L/2} \gamma r^2\, dr = \gamma\, \tfrac{1}{3} r^3 \Big|_{-L/2}^{L/2} = \tfrac{1}{12} m L^2$$

Twierdzenie Steinera

Moment bezwładności sztywnego układu cząstek względem dowolnej osi równy jest sumie momentu bezwładności $I_{\acute{S}}$ względem równoległej do niej osi, przechodzącej przez środek masy i iloczynu masy układu przez kwadrat odległości pomiędzy osiami.

$$I = I_{\acute{S}} + md^2$$

Moment bezwładności cienkiego, jednorodnego pręta względem prostopadłej do niego osi przechodzącej przez jego koniec i środek:

$$I_K = \int_0^L \gamma r^2\, dr = \gamma\, \tfrac{1}{3} r^3 \Big|_0^L = \tfrac{1}{3} m L^2 \qquad \gamma = \frac{m}{L}$$

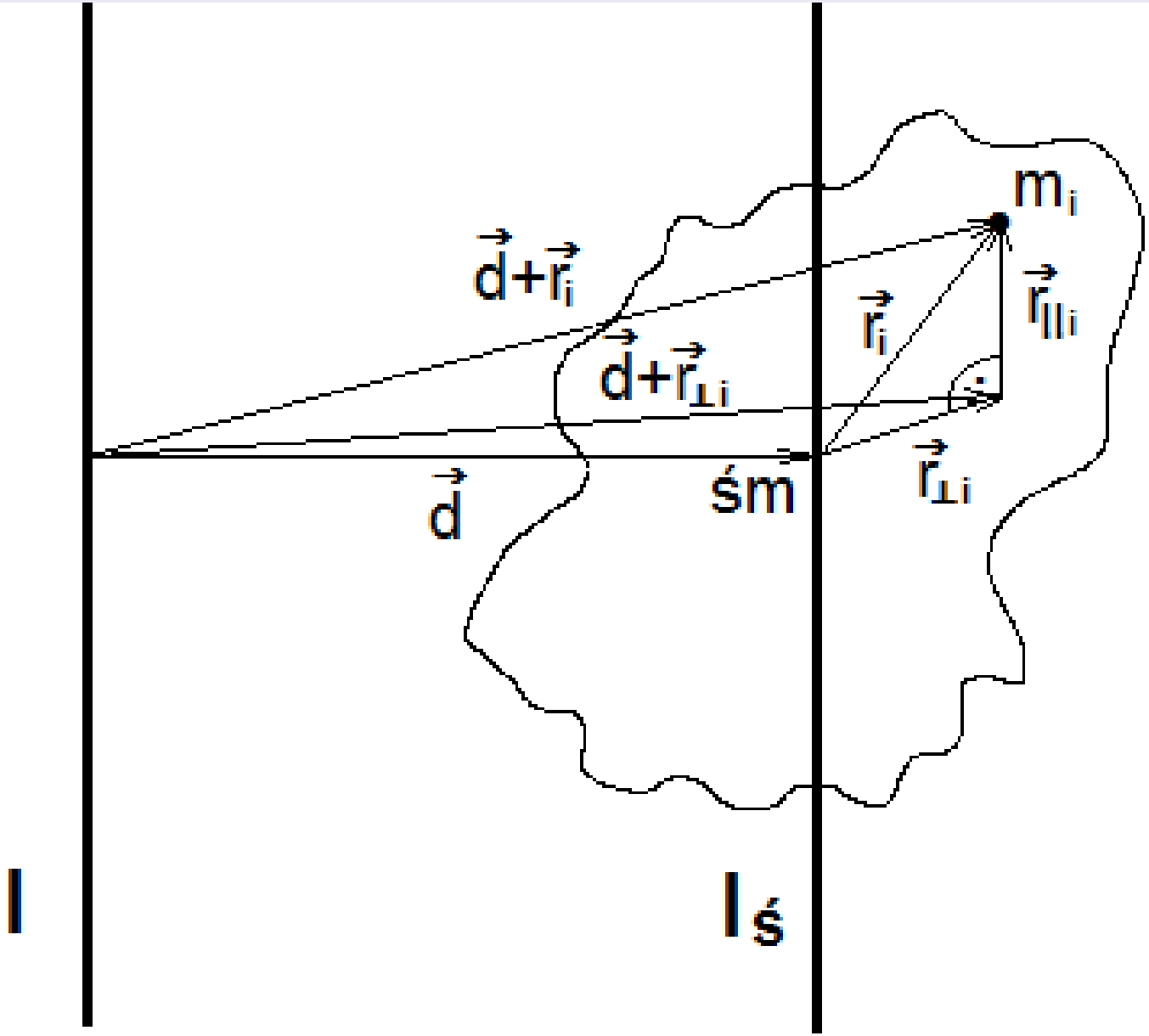
$$I_{\acute{S}} = \int_{-L/2}^{L/2} \gamma r^2\, dr = \gamma\, \tfrac{1}{3} r^3 \Big|_{-L/2}^{L/2} = \tfrac{1}{12} m L^2$$

Twierdzenie Steinera

Moment bezwładności sztywnego układu cząstek względem dowolnej osi równy jest sumie momentu bezwładności $I_{\acute{S}}$ względem równoległej do niej osi, przechodzącej przez środek masy i iloczynu masy układu przez kwadrat odległości pomiędzy osiami.

$$I = I_{\acute{S}} + md^2$$

np. dla cienkiego, jednorodnego pręta: $I = \frac{1}{12} m L^2 + m \left(\frac{1}{2} L\right)^2 = \frac{1}{3} m L^2$


m_i
$\vec{d}+\vec{r}_i$
$\vec{r}_i$
$\vec{r}_{||i}$
$\vec{d}+\vec{r}_{\perp i}$
$\vec{d}$
śm
$\vec{r}_{\perp i}$
I
Iś

Dowód: położenie i-tej masy podnosimy do kwadratu

$\vec{r}_i = \vec{r}_{\perp i} + \vec{r}_{\|i}$ – składowe: prostopadła i równoległa do osi

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{d} + \vec{r}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i d^2 + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}_{0} \cdot \vec{d} + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^{\,2} = md^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{\perp i}^{\,2}}_{I_{\text{ś}}}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{\|i}^{\,2}$$

Dowód: położenie i-tej masy podnosimy do kwadratu

$\vec{r}_i = \vec{r}_{\perp i} + \vec{r}_{\parallel i}$ – składowe: prostopadła i równoległa do osi

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{d} + \vec{r}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i d^2 + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}_{0} \cdot \vec{d} + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i^{\,2} = md^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{\perp i}^{\,2}}_{I_{\text{ś}}}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{\parallel i}^{\,2}$$

położenie i-tej masy rozdzielamy na części: prostopadłą i równoległą do osi

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{d} + \vec{r}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\left(\vec{d} + \vec{r}_{\perp i}\right)^2 + \vec{r}_{\parallel i}^{\,2}\right] = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{d} + \vec{r}_{\perp i}\right)^2}_{I}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_{\parallel i}^{\,2}$$

Główne osie bezwładności

są osiami dla których momenty bezwładności przyjmują wartości ekstremalne i nazywają się *głównymi momentami bezwładności*.

Główne osie bezwładności

są osiami dla których momenty bezwładności przyjmują wartości ekstremalne i nazywają się *głównymi momentami bezwładności*.

$$E_K = \frac{1}{2}\int\limits_m v^2\,dm = \frac{1}{2}\int\limits_m \vec{v}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})\;dm = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\int\limits_m \vec{r}\times\vec{v}\,dm = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}$$

Główne osie bezwładności

są osiami dla których momenty bezwładności przyjmują wartości ekstremalne i nazywają się *głównymi momentami bezwładności*.

$$E_K = \frac{1}{2}\int\limits_m v^2\,dm = \frac{1}{2}\int\limits_m \vec{v}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r})\,dm = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\int\limits_m \vec{r}\times\vec{v}\,dm = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}$$

$$\begin{aligned} v^2 &= (\vec{\omega}\times\vec{r})^2 = (\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \omega^2 r^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2 \\ &= \left(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right) - (\omega_x x+\omega_y y+\omega_z z)^2 \\ &= \omega_x^2\left(y^2+z^2\right)+\omega_y^2\left(x^2+z^2\right)+\omega_z^2\left(x^2+y^2\right) \\ &\quad -2\omega_x\omega_y xy - 2\omega_x\omega_z xz - 2\omega_y\omega_z yz \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_K &= \frac{1}{2}\omega_x^2 \int \left(y^2+z^2\right)\, dm + \frac{1}{2}\omega_y^2 \int \left(x^2+z^2\right)\, dm \\
&\quad + \frac{1}{2}\omega_z^2 \int \left(x^2+y^2\right)\, dm \\
&\quad - \omega_x\omega_y \int xy\, dm - \omega_x\omega_z \int xz\, dm - \omega_y\omega_z \int yz\, dm \\
&= \frac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{xz}\omega_x\omega_z + 2I_{yz}\omega_y\omega_z\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_K &= \frac{1}{2}\omega_x^2 \int \left(y^2+z^2\right)\, dm + \frac{1}{2}\omega_y^2 \int \left(x^2+z^2\right)\, dm \\
&\quad + \frac{1}{2}\omega_z^2 \int \left(x^2+y^2\right)\, dm \\
&\quad - \omega_x\omega_y \int xy\, dm - \omega_x\omega_z \int xz\, dm - \omega_y\omega_z \int yz\, dm \\
&= \frac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{xz}\omega_x\omega_z + 2I_{yz}\omega_y\omega_z\right)
\end{aligned}
$$

Momenty bezwładności względem osi układu:
$I_{xx} = \int \left(y^2+z^2\right)\, dm$, $I_{yy} = \int \left(x^2+z^2\right)\, dm$, $I_{zz} = \int \left(x^2+y^2\right)\, dm$.

$$
\begin{aligned}
E_K &= \frac{1}{2}\omega_x^2 \int \left(y^2+z^2\right)\, dm + \frac{1}{2}\omega_y^2 \int \left(x^2+z^2\right)\, dm \\
&\quad + \frac{1}{2}\omega_z^2 \int \left(x^2+y^2\right)\, dm \\
&\quad - \omega_x\omega_y \int xy\, dm - \omega_x\omega_z \int xz\, dm - \omega_y\omega_z \int yz\, dm \\
&= \frac{1}{2}\left(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 + 2I_{xy}\omega_x\omega_y + 2I_{xz}\omega_x\omega_z + 2I_{yz}\omega_y\omega_z\right)
\end{aligned}
$$

Momenty bezwładności względem osi układu:
$I_{xx} = \int \left(y^2+z^2\right)\, dm$, $I_{yy} = \int \left(x^2+z^2\right)\, dm$, $I_{zz} = \int \left(x^2+y^2\right)\, dm$.

Momenty zboczenia:
$I_{xy} = -\int xy\, dm$, $I_{xz} = -\int xz\, dm$, $I_{yz} = -\int yz\, dm$.

Jeśli jako osie układu przyjmiemy główne osie bezwładności, to momenty względem osi będą *głównymi momentami bezwładności*: I_1, I_2, I_3, a charakteryzujące asymetrię *momenty zboczenia* znikną:

$$E_K = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right)$$

Jeśli jako osie układu przyjmiemy główne osie bezwładności, to momenty względem osi będą *głównymi momentami bezwładności*: I_1, I_2, I_3, a charakteryzujące asymetrię *momenty zboczenia* znikną:

$$E_K = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right)$$

Wartości *głównych momentów bezwładności* zależą od kształtu ciała:

Jeśli jako osie układu przyjmiemy główne osie bezwładności, to momenty względem osi będą *głównymi momentami bezwładności*: I_1, I_2, I_3, a charakteryzujące asymetrię *momenty zboczenia* znikną:

$$E_K = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right)$$

Wartości *głównych momentów bezwładności* zależą od kształtu ciała:

- *bąk kulisty* ($I_1 = I_2 = I_3$) – wybór osi głównych dowolny,

Jeśli jako osie układu przyjmiemy główne osie bezwładności, to momenty względem osi będą *głównymi momentami bezwładności*: I_1, I_2, I_3, a charakteryzujące asymetrię *momenty zboczenia* znikną:

$$E_K = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right)$$

Wartości *głównych momentów bezwładności* zależą od kształtu ciała:

- *bąk kulisty* ($I_1 = I_2 = I_3$) – wybór osi głównych dowolny,
- *bąk symetryczny* ($I_1 \neq I_2 = I_3$) – osie główne to oś I_1 oraz dwie osie prostopadłe do niej i do siebie wzajemnie,

Jeśli jako osie układu przyjmiemy główne osie bezwładności, to momenty względem osi będą *głównymi momentami bezwładności*: I_1, I_2, I_3, a charakteryzujące asymetrię *momenty zboczenia* znikną:

$$E_K = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right)$$

Wartości *głównych momentów bezwładności* zależą od kształtu ciała:

- *bąk kulisty* ($I_1 = I_2 = I_3$) – wybór osi głównych dowolny,
- *bąk symetryczny* ($I_1 \neq I_2 = I_3$) – osie główne to oś I_1 oraz dwie osie prostopadłe do niej i do siebie wzajemnie,
- *bąk niesymetryczny* ($I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$) – osie główne prostopadłe do siebie i ściśle określone.

Jeśli jako osie układu przyjmiemy główne osie bezwładności, to momenty względem osi będą *głównymi momentami bezwładności*: I_1, I_2, I_3, a charakteryzujące asymetrię *momenty zboczenia* znikną:

$$E_K = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right)$$

Wartości *głównych momentów bezwładności* zależą od kształtu ciała:

- *bąk kulisty* ($I_1 = I_2 = I_3$) – wybór osi głównych dowolny,
- *bąk symetryczny* ($I_1 \neq I_2 = I_3$) – osie główne to oś I_1 oraz dwie osie prostopadłe do niej i do siebie wzajemnie,
- *bąk niesymetryczny* ($I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$) – osie główne prostopadłe do siebie i ściśle określone.

Jeśli ciało ma oś symetrii, to będzie ona jedną z głównych osi bezwładności. Jeśli ciało ma płaszczyznę symetrii, to dwie główne osie bezwładności będą leżały w tej płaszczyźnie.

W szczególości dla układu leżącego w płaszczyźnie, moment względem osi prostopadłej do płaszczyzny jest sumą dwóch pozostałych:

$$I_3 = \int \left(x^2 + y^2\right)\, dm = \int x^2\, dm + \int y^2\, dm = I_1 + I_2$$

W szczególości dla układu leżącego w płaszczyźnie, moment względem osi prostopadłej do płaszczyzny jest sumą dwóch pozostałych:

$$I_3 = \int \left(x^2 + y^2\right)\, dm = \int x^2\, dm + \int y^2\, dm = I_1 + I_2$$

Gdy mamy układ liniowy, rozmieszczony wzdłuż linii prostej czyli *rotator*, moment względem tej prostej znika a pozostałe momenty główne są sobie równe:

$$I_3 = 0, \qquad I_1 = I_2 = \int z^2\, dm$$

W szczególości dla układu leżącego w płaszczyźnie, moment względem osi prostopadłej do płaszczyzny jest sumą dwóch pozostałych:

$$I_3 = \int \left(x^2 + y^2\right)\, dm = \int x^2\, dm + \int y^2\, dm = I_1 + I_2$$

Gdy mamy układ liniowy, rozmieszczony wzdłuż linii prostej czyli *rotator*, moment względem tej prostej znika a pozostałe momenty główne są sobie równe:

$$I_3 = 0, \qquad I_1 = I_2 = \int z^2\, dm$$

W przypadku bąka niesymetrycznego żaden z głównych momentów nie może być większy niż suma dwóch pozostałych:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= \int \left(y^2 + z^2\right)\, dm + \int \left(x^2 + z^2\right)\, dm \\ &= \int \left(x^2 + y^2\right)\, dm + 2\int z^2\, dm \geqslant I_3 \end{aligned}$$

Moment pędu bryły:

$$\vec{L} = \int\limits_{\vec{p}} \vec{r} \times d\vec{p} = \int\limits_{m} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\ dm = \int\limits_{m} \left[r^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\, \vec{r} \right]\ dm$$

Moment pędu bryły:

$$\vec{L} = \int\limits_{\vec{p}} \vec{r} \times d\vec{p} = \int\limits_{m} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\ dm = \int\limits_{m} \left[r^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\, \vec{r} \right]\ dm$$

$$\begin{aligned} L_x &= \int \left[\left(x^2 + y^2 + z^2 \right) \omega_x - \left(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z \right) x \right]\ dm \\ &= \omega_x \int \left(y^2 + z^2 \right)\ dm - \omega_y \int xy\, dm - \omega_z \int xz\, dm \end{aligned}$$

Moment pędu bryły:

$$\vec{L} = \int\limits_{\vec{p}} \vec{r} \times d\vec{p} = \int\limits_{m} \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, dm = \int\limits_{m} \left[r^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\, \vec{r} \right] dm$$

$$\begin{aligned} L_x &= \int \left[\left(x^2 + y^2 + z^2 \right) \omega_x - \left(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z \right) x \right] dm \\ &= \omega_x \int \left(y^2 + z^2 \right) dm - \omega_y \int xy\, dm - \omega_z \int xz\, dm \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned}$$

Moment bezwładności w zapisie tensorowym

$$\vec{L} = \hat{I}\vec{\omega}$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Moment bezwładności w zapisie tensorowym

$$\vec{L} = \hat{I}\vec{\omega}$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Wektory momentu pędu $\vec{L}$ i prędkości kątowej $\vec{\omega}$ mają ten sam kierunek tylko w przypadku obrotu dookoła jednej z głównych osi.

Moment bezwładności w zapisie tensorowym

$$\vec{L} = \hat{I}\vec{\omega}$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Wektory momentu pędu $\vec{L}$ i prędkości kątowej $\vec{\omega}$ mają ten sam kierunek tylko w przypadku obrotu dookoła jednej z głównych osi.

Energia kinetyczna: $E_K = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \hat{I}\vec{\omega}$

Moment bezwładności w zapisie tensorowym

$$\vec{L} = \hat{I}\vec{\omega}$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Wektory momentu pędu $\vec{L}$ i prędkości kątowej $\vec{\omega}$ mają ten sam kierunek tylko w przypadku obrotu dookoła jednej z głównych osi.

Energia kinetyczna: $E_K = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^T \hat{I}\vec{\omega}$

Druga Zasada Dynamiki dla bryły sztywnej

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\left(\hat{I}\vec{\omega}\right)}{dt} = \hat{I}\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \hat{I}\vec{\varepsilon}$$

Zestawienie wzorów dla ruchu obrotowego bryły sztywnej dookoła stałej osi w analogii z ruchem prostoliniowym:

Zestawienie wzorów dla ruchu obrotowego bryły sztywnej dookoła stałej osi w analogii z ruchem prostoliniowym:

prędkość kątowa: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad v = \frac{dx}{dt}$

Zestawienie wzorów dla ruchu obrotowego bryły sztywnej dookoła stałej osi w analogii z ruchem prostoliniowym:

prędkość kątowa: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad v = \frac{dx}{dt}$

przyspieszenie kątowe: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad a = \frac{dv}{dt}$

Zestawienie wzorów dla ruchu obrotowego bryły sztywnej dookoła stałej osi w analogii z ruchem prostoliniowym:

prędkość kątowa: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad v = \frac{dx}{dt}$

przyspieszenie kątowe: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad a = \frac{dv}{dt}$

moment siły: $M = I\varepsilon = \frac{dL}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad F = ma = \frac{dp}{dt}$

Zestawienie wzorów dla ruchu obrotowego bryły sztywnej dookoła stałej osi w analogii z ruchem prostoliniowym:

prędkość kątowa: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad v = \frac{dx}{dt}$

przyspieszenie kątowe: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad a = \frac{dv}{dt}$

moment siły: $M = I\varepsilon = \frac{dL}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad F = ma = \frac{dp}{dt}$

moment pędu: $L = I\omega \quad \longleftrightarrow \quad p = mv$

Zestawienie wzorów dla ruchu obrotowego bryły sztywnej dookoła stałej osi w analogii z ruchem prostoliniowym:

prędkość kątowa: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad v = \frac{dx}{dt}$

przyspieszenie kątowe: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad a = \frac{dv}{dt}$

moment siły: $M = I\varepsilon = \frac{dL}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad F = ma = \frac{dp}{dt}$

moment pędu: $L = I\omega \quad \longleftrightarrow \quad p = mv$

energia kinetyczna: $E_K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \longleftrightarrow \quad E_K = \frac{1}{2}mv^2$

Zestawienie wzorów dla ruchu obrotowego bryły sztywnej dookoła stałej osi w analogii z ruchem prostoliniowym:

prędkość kątowa: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad v = \frac{dx}{dt}$

przyspieszenie kątowe: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad a = \frac{dv}{dt}$

moment siły: $M = I\varepsilon = \frac{dL}{dt} \quad \longleftrightarrow \quad F = ma = \frac{dp}{dt}$

moment pędu: $L = I\omega \quad \longleftrightarrow \quad p = mv$

energia kinetyczna: $E_K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \longleftrightarrow \quad E_K = \frac{1}{2}mv^2$

$$\begin{array}{cccccc} \varphi & \omega & \varepsilon & M & I & L \\ x & v & a & F & m & p \end{array}$$

Równania Eulera

W inercjalnym układzie odniesienia U o początku w środku masy bryły sztywnej: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

Równania Eulera

W inercjalnym układzie odniesienia U o początku w środku masy bryły sztywnej: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

Powyższe równanie w układzie U' sztywno związanym z bryłą, w którym osie skierowane są wzdłuż osi głównych bezwładności ($\hat{I}$ diagonalny):

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}' = \vec{M}$$

$$\vec{L}' = \left[I_{x'}\omega_{x'}, I_{y'}\omega_{y'}, I_{z'}\omega_{z'}\right] = \hat{I}\vec{\omega}$$

$$\hat{I}\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \left(\hat{I}\vec{\omega}\right) = \vec{M}$$

Równania Eulera

$$
\begin{aligned}
I_{x'}\frac{d\omega_{x'}}{dt} + \left(I_{z'} - I_{y'}\right)\omega_{y'}\omega_{z'} &= M_{x'} \\
I_{y'}\frac{d\omega_{y'}}{dt} + \left(I_{x'} - I_{z'}\right)\omega_{x'}\omega_{z'} &= M_{y'} \\
I_{z'}\frac{d\omega_{z'}}{dt} + \left(I_{y'} - I_{x'}\right)\omega_{x'}\omega_{y'} &= M_{z'}
\end{aligned}
$$

Równania Eulera

$$
\begin{aligned}
I_{x'}\frac{d\omega_{x'}}{dt} + \left(I_{z'} - I_{y'}\right)\omega_{y'}\omega_{z'} &= M_{x'} \\
I_{y'}\frac{d\omega_{y'}}{dt} + \left(I_{x'} - I_{z'}\right)\omega_{x'}\omega_{z'} &= M_{y'} \\
I_{z'}\frac{d\omega_{z'}}{dt} + \left(I_{y'} - I_{x'}\right)\omega_{x'}\omega_{y'} &= M_{z'}
\end{aligned}
$$

Gdy wektory prędkości kątowej i momentu pędu nie są równoległe, koniec wektora $\vec{\omega}$ zakreśla w układzie U' krzywą zwaną *polhodią*, a w układzie U krzywą zwaną *herpolhodią*.

Równania Eulera

$$
\begin{aligned}
I_{x'}\frac{d\omega_{x'}}{dt} + \left(I_{z'} - I_{y'}\right)\omega_{y'}\omega_{z'} &= M_{x'} \\
I_{y'}\frac{d\omega_{y'}}{dt} + \left(I_{x'} - I_{z'}\right)\omega_{x'}\omega_{z'} &= M_{y'} \\
I_{z'}\frac{d\omega_{z'}}{dt} + \left(I_{y'} - I_{x'}\right)\omega_{x'}\omega_{y'} &= M_{z'}
\end{aligned}
$$

Gdy wektory prędkości kątowej i momentu pędu nie są równoległe, koniec wektora $\vec{\omega}$ zakreśla w układzie U' krzywą zwaną *polhodią*, a w układzie U krzywą zwaną *herpolhodią*.

Bąk symetryczny

to wirująca bryła o symetrii obrotowej.

Równania Eulera

$$
\begin{aligned}
I_{x'}\frac{d\omega_{x'}}{dt} + \left(I_{z'} - I_{y'}\right)\omega_{y'}\omega_{z'} &= M_{x'} \\
I_{y'}\frac{d\omega_{y'}}{dt} + \left(I_{x'} - I_{z'}\right)\omega_{x'}\omega_{z'} &= M_{y'} \\
I_{z'}\frac{d\omega_{z'}}{dt} + \left(I_{y'} - I_{x'}\right)\omega_{x'}\omega_{y'} &= M_{z'}
\end{aligned}
$$

Gdy wektory prędkości kątowej i momentu pędu nie są równoległe, koniec wektora $\vec{\omega}$ zakreśla w układzie U' krzywą zwaną *polhodią*, a w układzie U krzywą zwaną *herpolhodią*.

Bąk symetryczny

to wirująca bryła o symetrii obrotowej.

Bąk swobodny

to bąk na który nie działa moment siły: $\vec{M} = 0$

Swobodny bąk symetryczny

z osią symetrii pokrywającą się z osią z' ($I_{y'} = I_{x'}$), nachyloną pod kątem α do osi obrotu bąka $\vec{\omega}$: $\omega_{z'0} = \omega \cos\alpha$

Swobodny bąk symetryczny

z osią symetrii pokrywającą się z osią z' ($I_{y'} = I_{x'}$), nachyloną pod kątem α do osi obrotu bąka $\vec{\omega}$: $\omega_{z'0} = \omega \cos\alpha$

$$\frac{d\omega_{x'}}{dt} + \frac{I_{z'} - I_{y'}}{I_{x'}}\omega_{y'}\omega_{z'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega_{x'}}{dt} + \Omega\omega_{y'} = 0$$

$$\frac{d\omega_{y'}}{dt} + \frac{I_{x'} - I_{z'}}{I_{y'}}\omega_{x'}\omega_{z'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega_{y'}}{dt} - \Omega\omega_{x'} = 0$$

$$\frac{d\omega_{z'}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{z'} = \omega_{z'0} = \mathrm{const}$$

gdzie: $\frac{I_{z'} - I_{x'}}{I_{x'}}\omega_{z'} = \Omega$

Swobodny bąk symetryczny

z osią symetrii pokrywającą się z osią z' ($I_{y'} = I_{x'}$), nachyloną pod kątem α do osi obrotu bąka $\vec{\omega}$: $\omega_{z'0} = \omega \cos\alpha$

$$\frac{d\omega_{x'}}{dt} + \frac{I_{z'} - I_{y'}}{I_{x'}}\omega_{y'}\omega_{z'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega_{x'}}{dt} + \Omega\omega_{y'} = 0$$

$$\frac{d\omega_{y'}}{dt} + \frac{I_{x'} - I_{z'}}{I_{y'}}\omega_{x'}\omega_{z'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega_{y'}}{dt} - \Omega\omega_{x'} = 0$$

$$\frac{d\omega_{z'}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_{z'} = \omega_{z'0} = \mathrm{const}$$

gdzie: $\frac{I_{z'} - I_{x'}}{I_{x'}}\omega_{z'} = \Omega$

Równanie ruchu składowej prędkości kątowej prostopadłej do osi symetrii bąka:

$$\frac{d^2\omega_{x'}}{dt^2} + \Omega^2\omega_{x'} = 0$$

$$
\begin{aligned}
\omega_{x'} &= \omega_{x'0}\cos\left(\Omega t+\varphi\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega_{x'}}{dt} = -\Omega\omega_{x'0}\sin\left(\Omega t+\varphi\right)\\
\omega_{y'} &= \omega_{x'0}\sin\left(\Omega t+\varphi\right)\\
\omega_{z'} &= \omega_{z'0}
\end{aligned}
$$

Składowe prędkości kątowej $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$ prostopadłe do osi symetrii bąka wirują ze stałą prędkością kątową Ω, składowa równoległa do osi symetrii jest stała.

$$
\begin{aligned}
\omega_{x'} &= \omega_{x'0}\cos(\Omega t+\varphi) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega_{x'}}{dt} = -\Omega\omega_{x'0}\sin(\Omega t+\varphi)\\
\omega_{y'} &= \omega_{x'0}\sin(\Omega t+\varphi)\\
\omega_{z'} &= \omega_{z'0}
\end{aligned}
$$

Składowe prędkości kątowej $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$ prostopadłe do osi symetrii bąka wirują ze stałą prędkością kątową Ω, składowa równoległa do osi symetrii jest stała.

Polhodia jest okręgiem o promieniu $\omega_{x'0}$, wzdłuż którego koniec wektora $\vec{\omega}$ porusza się ruchem jednostajnym z okresem T_n:

$$
T_n = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_{z'0}}\frac{I_{x'}}{I_{z'}-I_{x'}} = \frac{2\pi}{\omega\cos\alpha}\frac{I_{x'}}{I_{z'}-I_{x'}} = \frac{T}{\cos\alpha}\frac{I_{x'}}{I_{z'}-I_{x'}}
$$

Bąk pod działaniem sił zewnętrznych

Efekt giroskopowy

polega na obrocie momentu pędu (wraz z nim osi symetrii) bąka symetrycznego wokół osi prostopadłej do prędkości kątowej bąka i działającego nań momentu siły.

$$\vec{L} \parallel \vec{r} \vee \vec{L} \parallel \vec{F} \;\Rightarrow\; \vec{L} \perp \vec{M} \;\Rightarrow\; d\vec{L} = \vec{M}\,dt \perp \vec{L} \;\Rightarrow\; L = \mathrm{const}$$

Bąk pod działaniem sił zewnętrznych

Efekt giroskopowy

polega na obrocie momentu pędu (wraz z nim osi symetrii) bąka symetrycznego wokół osi prostopadłej do prędkości kątowej bąka i działającego nań momentu siły.

$$\vec{L} \parallel \vec{r} \vee \vec{L} \parallel \vec{F} \;\Rightarrow\; \vec{L} \perp \vec{M} \;\Rightarrow\; d\vec{L} = \vec{M}\,dt \perp \vec{L} \;\Rightarrow\; L = \mathrm{const}$$

Precesja

to obrót wektora momentu pędu pod wpływem momentu sił zewnętrznych.

Bąk pod działaniem sił zewnętrznych

Efekt giroskopowy

polega na obrocie momentu pędu (wraz z nim osi symetrii) bąka symetrycznego wokół osi prostopadłej do prędkości kątowej bąka i działającego nań momentu siły.

$$\vec{L} \parallel \vec{r} \vee \vec{L} \parallel \vec{F} \;\Rightarrow\; \vec{L} \perp \vec{M} \;\Rightarrow\; d\vec{L} = \vec{M}\,dt \perp \vec{L} \;\Rightarrow\; L = \mathrm{const}$$

Precesja

to obrót wektora momentu pędu pod wpływem momentu sił zewnętrznych.

2θ – kąt rozwarcia stożka tworzonego przez moment pędu

$$d\varphi = \frac{dL}{L\sin\theta} = \frac{M\,dt}{L\sin\theta}$$

prędkość kątowa precesji: $\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L\sin\theta}$

Przykład: bąk symetryczny w polu siły grawitacyjnej

Początek układu współrzędnych umieszczamy w punkcie podparcia bąka, a oś współrzędnych z kierujemy pionowo do góry.

Przykład: bąk symetryczny w polu siły grawitacyjnej

Początek układu współrzędnych umieszczamy w punkcie podparcia bąka, a oś współrzędnych z kierujemy pionowo do góry.

Moment siły ciężkości

$$\vec{M} = \vec{R}_S \times m\vec{g} \quad \Rightarrow \quad M = mgR_S \sin\theta$$

Przykład: bąk symetryczny w polu siły grawitacyjnej

Początek układu współrzędnych umieszczamy w punkcie podparcia bąka, a oś współrzędnych z kierujemy pionowo do góry.

Moment siły ciężkości

$$\vec{M} = \vec{R}_S \times m\vec{g} \quad \Rightarrow \quad M = mgR_S \sin\theta$$

Bąk wykonuje ruch z precesją o częstości:

$$\omega_P = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{mgR_S}{L}$$

Przykład: bąk symetryczny w polu siły grawitacyjnej

Początek układu współrzędnych umieszczamy w punkcie podparcia bąka, a oś współrzędnych z kierujemy pionowo do góry.

Moment siły ciężkości

$$\vec{M} = \vec{R}_S \times m\vec{g} \quad \Rightarrow \quad M = mgR_S \sin\theta$$

Bąk wykonuje ruch z precesją o częstości:

$$\omega_P = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{mgR_S}{L}$$

Gdy oś momentu pędu nie pokrywa się z osią symetrii bąka, na ruch precesyjny osi symetrii nakłada się **nutacja** o okresie T_n.
Oś symetrii bąka zakreśla wtedy linię wężykowatą.

Przykład: Ziemia jako bąk

Kształtem swym Ziemia przypomina spłaszczoną elipsoidę obrotową, wirującą wokół osi nie pokrywającej się z jej osią symetrii. Działa na nią zewnętrzny moment siły związany z niejednorodnością wokół niej zewnętrznego pola grawitacyjnego. Powoduje on obrót osi symetrii Ziemi zakreślającej stożek (o kącie rozwarcia $2 \cdot 23^\circ 27'$) wokół kierunku normalnego do płaszczyzny ekliptyki z okresem około 26 000 lat.

Przykład: Ziemia jako bąk

Kształtem swym Ziemia przypomina spłaszczoną elipsoidę obrotową, wirującą wokół osi nie pokrywającej się z jej osią symetrii. Działa na nią zewnętrzny moment siły związany z niejednorodnością wokół niej zewnętrznego pola grawitacyjnego. Powoduje on obrót osi symetrii Ziemi zakreślającej stożek (o kącie rozwarcia $2 \cdot 23°27'$) wokół kierunku normalnego do płaszczyzny ekliptyki z okresem około 26 000 lat.

Nakładają się na tę precesję niewielkie nutacje o średnicy do 15 m i okresie obrotu bieguna kinematycznego około 427 dni.
Dla Ziemi: $T_n = \frac{T}{\cos\alpha} \frac{I_{x'}}{I_{z'} - I_{x'}} \approx 300\ T$

Przykład: Ziemia jako bąk

Kształtem swym Ziemia przypomina spłaszczoną elipsoidę obrotową, wirującą wokół osi nie pokrywającej się z jej osią symetrii. Działa na nią zewnętrzny moment siły związany z niejednorodnością wokół niej zewnętrznego pola grawitacyjnego. Powoduje on obrót osi symetrii Ziemi zakreślającej stożek (o kącie rozwarcia $2 \cdot 23°27'$) wokół kierunku normalnego do płaszczyzny ekliptyki z okresem około 26 000 lat.

Nakładają się na tę precesję niewielkie nutacje o średnicy do 15 m i okresie obrotu bieguna kinematycznego około 427 dni.
Dla Ziemi: $T_n = \frac{T}{\cos\alpha}\frac{I_{x'}}{I_{z'}-I_{x'}} \approx 300\ T$

Ruch obrotowy Ziemi wykorzystywany jest przez **kompas giroskopowy** ustawiający swą oś obrotu zgodnie z osią obrotu Ziemi, aby zachować swój moment pędu.

Wahadło fizyczne

Wahadło fizyczne

jest to bryła, która może się wahać względem stałej osi obrotu. *Długością wahadła l* jest odległość od osi obrotu do środka masy.

Wahadło fizyczne

Wahadło fizyczne

jest to bryła, która może się wahać względem stałej osi obrotu. *Długością wahadła* l jest odległość od osi obrotu do środka masy.

Moment siły ciężkości względem środka masy dla wahadła odchylonego od pionu o kąt φ: $M = mgl \sin \varphi$

Wahadło fizyczne

Wahadło fizyczne

jest to bryła, która może się wahać względem stałej osi obrotu. *Długością wahadła* l jest odległość od osi obrotu do środka masy.

Moment siły ciężkości względem środka masy dla wahadła odchylonego od pionu o kąt φ: $M = mgl \sin \varphi$

Równanie ruchu: $I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi$
Moment siły jest z ujemnym znakiem, ponieważ zmniejsza wychylenie.

Wahadło fizyczne

Wahadło fizyczne

jest to bryła, która może się wahać względem stałej osi obrotu. *Długością wahadła* l jest odległość od osi obrotu do środka masy.

Moment siły ciężkości względem środka masy dla wahadła odchylonego od pionu o kąt φ: $M = mgl \sin\varphi$

Równanie ruchu: $I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi$
Moment siły jest z ujemnym znakiem, ponieważ zmniejsza wychylenie.

Moment kierujący

$$M_k = mgl$$

Wahadło fizyczne

Wahadło fizyczne

jest to bryła, która może się wahać względem stałej osi obrotu. *Długością wahadła l* jest odległość od osi obrotu do środka masy.

Moment siły ciężkości względem środka masy dla wahadła odchylonego od pionu o kąt φ: $M = mgl \sin\varphi$

Równanie ruchu: $I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\sin\varphi$
Moment siły jest z ujemnym znakiem, ponieważ zmniejsza wychylenie.

Moment kierujący

$$M_k = mgl$$

Dla małych wychyleń: $\sin\varphi \approx \varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{M_k}{I}\varphi$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{M_k}{I}\varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{M_k}{I}\varphi$$

separacja zmiennych i całkowanie:

$$I\omega\, d\omega = -M_k\varphi\, d\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}I\omega^2 = -\frac{1}{2}M_k\varphi^2 + C$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{M_k}{I}\varphi$$

separacja zmiennych i całkowanie:

$$I\omega\, d\omega = -M_k\varphi\, d\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}I\omega^2 = -\frac{1}{2}M_k\varphi^2 + C$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}I\omega^2}_{E_K} + \underbrace{\frac{1}{2}M_k\varphi^2}_{E_P} = C = E_C$$ – całkowita energia mechaniczna wahadła

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{M_k}{I}\varphi$$

separacja zmiennych i całkowanie:

$$I\omega\, d\omega = -M_k\varphi\, d\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}I\omega^2 = -\frac{1}{2}M_k\varphi^2 + C$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}I\omega^2}_{E_K} + \underbrace{\frac{1}{2}M_k\varphi^2}_{E_P} = C = E_C$$ – całkowita energia mechaniczna wahadła

$$\omega = \sqrt{\frac{2E_C - M_k\varphi^2}{I}} = \sqrt{\frac{M_k}{I}}\sqrt{\frac{2E_C}{M_k} - \varphi^2}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi} = -\frac{M_k}{I}\varphi$$

separacja zmiennych i całkowanie:

$$I\omega\, d\omega = -M_k\varphi\, d\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}I\omega^2 = -\frac{1}{2}M_k\varphi^2 + C$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}I\omega^2}_{E_K} + \underbrace{\frac{1}{2}M_k\varphi^2}_{E_P} = C = E_C$$ – całkowita energia mechaniczna wahadła

$$\omega = \sqrt{\frac{2E_C - M_k\varphi^2}{I}} = \sqrt{\frac{M_k}{I}}\sqrt{\frac{2E_C}{M_k} - \varphi^2}$$

separacja zmiennych i całkowanie:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2E_C}{M_k} - \varphi^2}} = \sqrt{\frac{M_k}{I}}\, dt \quad \Rightarrow \quad \arcsin\left(\sqrt{\frac{M_k}{2E_C}}\varphi\right) = \sqrt{\frac{M_k}{I}}t + C$$

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2E_C}{M_k}} \sin\left(\sqrt{\frac{M_k}{I}}t + \vartheta_0\right) = \varphi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \vartheta_0\right)$$

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2E_C}{M_k}} \sin\left(\sqrt{\frac{M_k}{I}}t + \vartheta_0\right) = \varphi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \vartheta_0\right)$$

Amplituda wahań: $\varphi_0 = \sqrt{\frac{2E_C}{M_k}}$

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2E_C}{M_k}} \sin\left(\sqrt{\frac{M_k}{I}}t + \vartheta_0\right) = \varphi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \vartheta_0\right)$$

Amplituda wahań: $\varphi_0 = \sqrt{\frac{2E_C}{M_k}}$

Okres wahań: $\sqrt{\frac{M_k}{I}} = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{M_k}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}$

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2E_C}{M_k}} \sin\left(\sqrt{\frac{M_k}{I}}t + \vartheta_0\right) = \varphi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \vartheta_0\right)$$

Amplituda wahań: $\varphi_0 = \sqrt{\frac{2E_C}{M_k}}$

Okres wahań: $\sqrt{\frac{M_k}{I}} = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{M_k}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}$

Długość zredukowana wahadła fizycznego:

$$l_r = \frac{I}{ml} = \frac{I_s + ml^2}{ml} = \frac{I_s}{ml} + l > l$$

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2E_C}{M_k}} \sin\left(\sqrt{\frac{M_k}{I}} t + \vartheta_0\right) = \varphi_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \vartheta_0\right)$$

Amplituda wahań: $\varphi_0 = \sqrt{\frac{2E_C}{M_k}}$

Okres wahań: $\sqrt{\frac{M_k}{I}} = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{M_k}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}$

Długość zredukowana wahadła fizycznego:

$$l_r = \frac{I}{ml} = \frac{I_s + ml^2}{ml} = \frac{I_s}{ml} + l > l$$

Stała fazowa: ϑ_0