Ruch harmoniczny

Adam Szmagliński

Instytut Fizyki PK

Kraków, 29.10.2016

Ruch harmoniczny

Drgania

to ruchy powtarzające się.

Ruch harmoniczny

Drgania

to ruchy powtarzające się.

Jeśli czas powtarzalności *drgań* jest stały, nazywamy go **okresem** a ruch **okresowym**.

Ruch harmoniczny

Drgania

to ruchy powtarzające się.

Jeśli czas powtarzalności *drgań* jest stały, nazywamy go **okresem** a ruch **okresowym**.

Okresowość ruchu można opisać równaniem $q(t+T) = q(t)$ gdzie q jest parametrem ruchu, t oznacza czas.

Ruch harmoniczny

Drgania

to ruchy powtarzające się.

Jeśli czas powtarzalności *drgań* jest stały, nazywamy go **okresem** a ruch **okresowym**.

Okresowość ruchu można opisać równaniem $q(t+T) = q(t)$ gdzie q jest parametrem ruchu, t oznacza czas.

Okres T

to najmniejszy odstęp czasu, po którym ruch się powtarza.

Ruch harmoniczny

Drgania

to ruchy powtarzające się.

Jeśli czas powtarzalności *drgań* jest stały, nazywamy go **okresem** a ruch **okresowym**.

Okresowość ruchu można opisać równaniem $q(t+T) = q(t)$ gdzie q jest parametrem ruchu, t oznacza czas.

Okres T

to najmniejszy odstęp czasu, po którym ruch się powtarza.

Częstość ruchu

$\nu = \frac{1}{T}$ mierzymy w *hercach*: $1\,Hz = 1\,s^{-1}$.

Jeśli ruch jest symetryczny, wygodnie jest przyjąć punkt odniesienia dla wartości parametru ruchu q odpowiadającej środkowi symetrii.
W środku symetrii: $q = 0$.

Jeśli ruch jest symetryczny, wygodnie jest przyjąć punkt odniesienia dla wartości parametru ruchu q odpowiadającej środkowi symetrii.
W środku symetrii: $q = 0$.

Amplituda q_0

to maksymalna wartość okresowo zmiennej wielkości q: $-q_0 \leqslant q \leqslant q_0$

Jeśli ruch jest symetryczny, wygodnie jest przyjąć punkt odniesienia dla wartości parametru ruchu q odpowiadającej środkowi symetrii.
W środku symetrii: $q = 0$.

Amplituda q_0

to maksymalna wartość okresowo zmiennej wielkości q: $-q_0 \leqslant q \leqslant q_0$

Drgania harmoniczne

to *drgania* w których parametr ruchu q da się opisać za pomocą funkcji *sinus* lub *cosinus*.

$$q(t) = q_0 \sin(\omega t + \vartheta)$$

ω – **częstość kołowa** (pulsacja)
argument funkcji *sinus*: $\Theta = \omega t + \vartheta$ nazywamy **fazą**
ϑ – **stała fazowa**

Częstość kołowa ω jest proporcjonalna do *częstości* ν.
Pulsację mierzymy w radianach na sekundę, a *częstość* w hercach.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Częstość kołowa ω jest proporcjonalna do *częstości* ν.
Pulsację mierzymy w radianach na sekundę, a *częstość* w hercach.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Oscylatory

to ciała wykonujące drgania.

Częstość kołowa ω jest proporcjonalna do *częstości* ν.
Pulsację mierzymy w radianach na sekundę, a *częstość* w hercach.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Oscylatory

to ciała wykonujące drgania.

Rodzaje *oscylatorów* i odpowiadające im częstości:

Częstość kołowa ω jest proporcjonalna do *częstości* ν.
Pulsację mierzymy w radianach na sekundę, a *częstość* w hercach.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Oscylatory

to ciała wykonujące drgania.

Rodzaje *oscylatorów* i odpowiadające im częstości:

- *mechaniczne* – do około 10^5 *Hz* (częstość akustyczna),

Częstość kołowa ω jest proporcjonalna do *częstości* ν.
Pulsację mierzymy w radianach na sekundę, a *częstość* w hercach.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Oscylatory

to ciała wykonujące drgania.

Rodzaje *oscylatorów* i odpowiadające im częstości:

- *mechaniczne* – do około 10^5 *Hz* (częstość akustyczna),
- *elektryczne* $10^3 - 10^{12}$ *Hz* (częstość radiowa),

Częstość kołowa ω jest proporcjonalna do *częstości* ν.
Pulsację mierzymy w radianach na sekundę, a *częstość* w hercach.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Oscylatory

to ciała wykonujące drgania.

Rodzaje *oscylatorów* i odpowiadające im częstości:

- *mechaniczne* – do około 10^5 *Hz* (częstość akustyczna),
- *elektryczne* $10^3 - 10^{12}$ *Hz* (częstość radiowa),
- *atomowe* $10^{11} - 10^{17}$ *Hz* (częstość optyczna),

Częstość kołowa ω jest proporcjonalna do *częstości* ν.
Pulsację mierzymy w radianach na sekundę, a *częstość* w hercach.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Oscylatory

to ciała wykonujące drgania.

Rodzaje *oscylatorów* i odpowiadające im częstości:

- *mechaniczne* – do około 10^5 *Hz* (częstość akustyczna),
- *elektryczne* $10^3 - 10^{12}$ *Hz* (częstość radiowa),
- *atomowe* $10^{11} - 10^{17}$ *Hz* (częstość optyczna),
- *jądrowe* od 10^{22} *Hz*.

Aby układ mógł wykonywać drgania, muszą być spełnione warunki:

Aby układ mógł wykonywać drgania, muszą być spełnione warunki:

1. istnienie położenia równowagi i przywracającej go siły zwrotnej,

Aby układ mógł wykonywać drgania, muszą być spełnione warunki:

1. istnienie położenia równowagi i przywracającej go siły zwrotnej,
2. bezwładność układu,

Aby układ mógł wykonywać drgania, muszą być spełnione warunki:

1. istnienie położenia równowagi i przywracającej go siły zwrotnej,
2. bezwładność układu,
3. niewielkie opory ruchu.

Aby układ mógł wykonywać drgania, muszą być spełnione warunki:

1. istnienie położenia równowagi i przywracającej go siły zwrotnej,
2. bezwładność układu,
3. niewielkie opory ruchu.

Położenia równowagi odpowiadają minimom energii potencjalnej:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad} E_P = 0$$

Aby układ mógł wykonywać drgania, muszą być spełnione warunki:

1. istnienie położenia równowagi i przywracającej go siły zwrotnej,
2. bezwładność układu,
3. niewielkie opory ruchu.

Położenia równowagi odpowiadają minimom energii potencjalnej:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad} E_P = 0$$

Bezwładność powoduje, że po dojściu do położenia równowagi ciało nie zatrzymuje się, lecz wychyla się w przeciwną stronę. Miarą bezwładności w oscylatorach mechanicznych jest masa ciała drgającego.

Druga definicja ruchu harmonicznego

W ruchu harmonicznym siła przywracająca równowagę jest proporcjonalna i przeciwnie skierowana do wychylenia z położenia równowagi:

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

$\vec{F}$ – siła zwrotna
$k = \mathrm{const} > 0$ – współczynnik sprężystości

Równanie ruchu harmonicznego z Drugiej Zasady Dynamiki:

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r}$$

Równanie ruchu harmonicznego z Drugiej Zasady Dynamiki:

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r}$$

w jednym wymiarze: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{m}x$

Równanie ruchu harmonicznego z Drugiej Zasady Dynamiki:

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r}$$

w jednym wymiarze: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{m}x$

separacja zmiennych i całkowanie:

$$mv\,dv = -kx\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}kx^2 + C$$

Równanie ruchu harmonicznego z Drugiej Zasady Dynamiki:

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r}$$

w jednym wymiarze: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{m}x$

separacja zmiennych i całkowanie:

$$mv\,dv = -kx\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}kx^2 + C$$

całkowita energia mechaniczna:

$$E_K\left(x=0\right) = E_0 \quad \Rightarrow \quad C = E_0 = E_K + E_{PS}$$

Równanie ruchu harmonicznego z Drugiej Zasady Dynamiki:

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -k\vec{r}$$

w jednym wymiarze: $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} = -\frac{k}{m}x$

separacja zmiennych i całkowanie:

$$mv\,dv = -kx\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}kx^2 + C$$

całkowita energia mechaniczna:

$$E_K\left(x=0\right) = E_0 \quad \Rightarrow \quad C = E_0 = E_K + E_{PS}$$

energia potencjalna sprężystości: $E_{PS} = \frac{1}{2}kx^2$

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E_0}{m} - \frac{k}{m}x^2} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{2E_0}{k} - x^2}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E_0}{m} - \frac{k}{m}x^2} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{2E_0}{k} - x^2}$$

separacja zmiennych i całkowanie:

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2E_0}{k} - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,dt \quad \Rightarrow \quad \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E_0}}x\right) = \sqrt{\frac{k}{m}}t + C$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2E_0}{m} - \frac{k}{m}x^2} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{2E_0}{k} - x^2}$$

separacja zmiennych i całkowanie:

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2E_0}{k} - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\,dt \quad \Rightarrow \quad \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{2E_0}}x\right) = \sqrt{\frac{k}{m}}t + C$$

$$x(t) = \sqrt{\frac{2E_0}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + C\right) = x_0 \sin(\omega t + \vartheta)$$

amplituda: $x_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{k}} \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{1}{2}kx_0^2$

częstość kołowa: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad k = m\omega^2$

okres: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

faza ruchu: $\omega t + \vartheta$, stała fazowa: ϑ

Powszechność ruchu harmonicznego

Zależność energii potencjalnej od położenia przybliżamy szeregiem potęgowym: $E_P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{d^n E_P}{dx^n}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

dla $x_0 = 0$:

$$E_P(x) = E_P(0) + \underbrace{\left.\frac{dE_P}{dx}\right|_{x=0}}_{0} x + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 E_P}{dx^2}\right|_{x=0} x^2 + \frac{1}{6} \left.\frac{d^3 E_P}{dx^3}\right|_{x=0} x^3 + \ldots$$

Powszechność ruchu harmonicznego

Zależność energii potencjalnej od położenia przybliżamy szeregiem potęgowym: $E_P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{d^n E_P}{dx^n}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

dla $x_0 = 0$:

$$E_P(x) = E_P(0) + \underbrace{\left.\frac{dE_P}{dx}\right|_{x=0}}_{0} x + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 E_P}{dx^2}\right|_{x=0} x^2 + \frac{1}{6} \left.\frac{d^3 E_P}{dx^3}\right|_{x=0} x^3 + \ldots$$

Dla małych wychyleń można pominąć wyrazy z wyższymi potęgami:

$$E_P(x) \approx E_P(0) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 E_P}{dx^2}\right|_{x=0} x^2$$

Stąd energię potencjalną przybliżamy parabolą.

Powszechność ruchu harmonicznego

Zależność energii potencjalnej od położenia przybliżamy szeregiem potęgowym: $E_P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{d^n E_P}{dx^n}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

dla $x_0 = 0$:

$$E_P(x) = E_P(0) + \underbrace{\left.\frac{dE_P}{dx}\right|_{x=0}}_{0} x + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 E_P}{dx^2}\right|_{x=0} x^2 + \frac{1}{6} \left.\frac{d^3 E_P}{dx^3}\right|_{x=0} x^3 + \ldots$$

Dla małych wychyleń można pominąć wyrazy z wyższymi potęgami:

$$E_P(x) \approx E_P(0) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 E_P}{dx^2}\right|_{x=0} x^2$$

Stąd energię potencjalną przybliżamy parabolą.

Siła zwrotna sprężystości: $F = -\frac{dE_P}{dx} = -\left.\frac{d^2 E_P}{dx^2}\right|_{x=0} x = -kx$

gdzie stała sprężystości: $k = \left.\frac{d^2 E_P}{dx^2}\right|_{x=0}$

Dla małych wychyleń siła zwrotna proporcjonalna jest do wychylenia.

Przykład oscylatora sprężystego

Energię oddziaływań międzycząsteczkowych opisuje się wyrażeniem:

$$E_P(r) = Ar^{-n} - Br^{-m}$$

Współczynniki A, B, $n > m$ mają charakter empiryczny,
a r jest odległością między cząsteczkami.
Np. w potencjale Lennarda-Jonesa: $n = 12$, $m = 6$.

Przykład oscylatora sprężystego

Energię oddziaływań międzycząsteczkowych opisuje się wyrażeniem:

$$E_P(r) = Ar^{-n} - Br^{-m}$$

Współczynniki A, B, $n > m$ mają charakter empiryczny,
a r jest odległością między cząsteczkami.
Np. w potencjale Lennarda-Jonesa: $n = 12$, $m = 6$.

Siła w położeniu równowagi:

$$F(r_0) = -\left.\frac{\partial E_P}{\partial r}\right|_{r=r_0} = nAr_0^{-n-1} - mBr_0^{-m-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \sqrt[n-m]{\frac{nA}{mB}}$$

Przykład oscylatora sprężystego

Energię oddziaływań międzycząsteczkowych opisuje się wyrażeniem:

$$E_P(r) = Ar^{-n} - Br^{-m}$$

Współczynniki A, B, $n > m$ mają charakter empiryczny,
a r jest odległością między cząsteczkami.
Np. w potencjale Lennarda-Jonesa: $n = 12$, $m = 6$.

Siła w położeniu równowagi:

$$F(r_0) = -\left.\frac{\partial E_P}{\partial r}\right|_{r=r_0} = nAr_0^{-n-1} - mBr_0^{-m-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \sqrt[n-m]{\frac{nA}{mB}}$$

Współczynnik sprężystości:

$$k = \left.\frac{d^2 E_P}{dr^2}\right|_{r=r_0} = n(n+1)Ar_0^{-n-2} - m(m+1)Br_0^{-m-2}$$

Przykład oscylatora sprężystego

Energię oddziaływań międzycząsteczkowych opisuje się wyrażeniem:

$$E_P(r) = Ar^{-n} - Br^{-m}$$

Współczynniki A, B, $n > m$ mają charakter empiryczny,
a r jest odległością między cząsteczkami.
Np. w potencjale Lennarda-Jonesa: $n = 12$, $m = 6$.

Siła w położeniu równowagi:

$$F(r_0) = -\left.\frac{\partial E_P}{\partial r}\right|_{r=r_0} = nAr_0^{-n-1} - mBr_0^{-m-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = \sqrt[n-m]{\frac{nA}{mB}}$$

Współczynnik sprężystości:

$$k = \left.\frac{d^2 E_P}{dr^2}\right|_{r=r_0} = n(n+1)Ar_0^{-n-2} - m(m+1)Br_0^{-m-2}$$

Siła sprężystości: $\quad F(r) = -k(r - r_0) = -k\Delta r$

Przejście do zjawisk makroskopowych

Dla N cząsteczek leżących wzdłuż prostej jednorodne odkształcenia się sumują, dając w wyniku odkształcenie makroskopowe: $\Delta l = N\Delta r$

Przejście do zjawisk makroskopowych

Dla N cząsteczek leżących wzdłuż prostej jednorodne odkształcenia się sumują, dając w wyniku odkształcenie makroskopowe: $\Delta l = N\Delta r$

Jest ono związane z makroskopową siłą **prawem Hooke'a**: $F = -k\Delta l$

Przejście do zjawisk makroskopowych

Dla N cząsteczek leżących wzdłuż prostej jednorodne odkształcenia się sumują, dając w wyniku odkształcenie makroskopowe: $\Delta l = N\Delta r$

Jest ono związane z makroskopową siłą **prawem Hooke'a**: $F = -k\Delta l$

Odkształcenie liniowe

bezwzględne: $\Delta l = l - l_0$ względne: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

Przejście do zjawisk makroskopowych

Dla N cząsteczek leżących wzdłuż prostej jednorodne odkształcenia się sumują, dając w wyniku odkształcenie makroskopowe: $\Delta l = N\Delta r$

Jest ono związane z makroskopową siłą **prawem Hooke'a**: $F = -k\Delta l$

Odkształcenie liniowe

bezwzględne: $\Delta l = l - l_0$ względne: $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$

Odkształcenie objętościowe

$\Delta V = V - V_0$ $\gamma = \frac{\Delta V}{V_0}$

Naprężenie

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

S – powierzchnia

Naprężenie

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

S – powierzchnia

Prawo Hooke'a dla sił działających prostopadle do powierzchni:

liniowe: $\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma$ objętościowe: $\gamma = K\sigma$

E – moduł Younga K – moduł ściśliwości

Naprężenie

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

S – powierzchnia

Prawo Hooke'a dla sił działających prostopadle do powierzchni:

liniowe: $\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma$ objętościowe: $\gamma = K\sigma$

E – moduł Younga K – moduł ściśliwości

Prawo Hooke'a dla sił działających stycznie do powierzchni (ścinanie):

$$\alpha = \frac{1}{G}\sigma$$

α – kąt odchylenia ścianek prostopadłych do powierzchni

G – moduł sztywności

σ – naprężenie ścinające

Wahadło torsyjne

jest to tarcza o momencie bezwładności I zawieszona na drucie o długości l i momencie bezwładności względem osi obrotu I_P, którego drugi koniec jest nieruchomy.

Wahadło torsyjne

jest to tarcza o momencie bezwładności I zawieszona na drucie o długości l i momencie bezwładności względem osi obrotu I_P, którego drugi koniec jest nieruchomy.

Przy obrocie o kąt φ powstaje moment zwrotny: $M = -\tau\varphi$
stała skręcenia: $\tau = \frac{GI_P}{l}$

Wahadło torsyjne

jest to tarcza o momencie bezwładności I zawieszona na drucie o długości l i momencie bezwładności względem osi obrotu I_P, którego drugi koniec jest nieruchomy.

Przy obrocie o kąt φ powstaje moment zwrotny: $M = -\tau\varphi$
stała skręcenia: $\tau = \frac{GI_P}{l}$

Z Drugiej Zasady Dynamiki

$$I\ddot{\varphi} = -\tau\varphi$$

Równanie to ważne jest w całym zakresie stosowalności *prawa Hooke'a*.

Wahadło torsyjne

jest to tarcza o momencie bezwładności I zawieszona na drucie o długości l i momencie bezwładności względem osi obrotu I_P, którego drugi koniec jest nieruchomy.

Przy obrocie o kąt φ powstaje moment zwrotny: $M = -\tau\varphi$
stała skręcenia: $\tau = \frac{GI_P}{l}$

Z Drugiej Zasady Dynamiki

$$I\ddot{\varphi} = -\tau\varphi$$

Równanie to ważne jest w całym zakresie stosowalności *prawa Hooke'a*.

Okres wahań

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\tau}}$$

Ciężarek na ważkiej sprężynie

Ciężarek o masie m zawieszony na sprężynie długości l i masie m_S.

Ciężarek na ważkiej sprężynie

Ciężarek o masie m zawieszony na sprężynie długości l i masie m_S.

element masy sprężyny: $dm = \frac{ds}{l} m_S$
s – odległość od punktu zawieszenia sprężyny
$\frac{s}{l} x$ – przemieszczenie elementu sprężyny

Ciężarek na ważkiej sprężynie

Ciężarek o masie m zawieszony na sprężynie długości l i masie m_S.

element masy sprężyny: $dm = \frac{ds}{l} m_S$
s – odległość od punktu zawieszenia sprężyny
$\frac{s}{l} x$ – przemieszczenie elementu sprężyny

Energia kinetyczna sprężyny:

$$E_{KS} = \int\limits_{m_S} \frac{1}{2}\, dm \left(\frac{s}{l}\dot{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_S}{l^3}\dot{x}^2 \int\limits_0^l s^2\, ds = \frac{1}{6} m_S \dot{x}^2$$

Energia kinetyczna całego układu: $E_K = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{3} m_S\right)\dot{x}^2$
Efektywna masa sprężyny jest trzykrotnie mniejsza od jej masy.

Ciężarek na ważkiej sprężynie

Ciężarek o masie m zawieszony na sprężynie długości l i masie m_S.

element masy sprężyny: $dm = \frac{ds}{l} m_S$
s – odległość od punktu zawieszenia sprężyny
$\frac{s}{l} x$ – przemieszczenie elementu sprężyny

Energia kinetyczna sprężyny:

$$E_{KS} = \int\limits_{m_S} \frac{1}{2}\, dm \left(\frac{s}{l}\dot{x}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_S}{l^3}\dot{x}^2 \int\limits_0^l s^2\, ds = \frac{1}{6} m_S \dot{x}^2$$

Energia kinetyczna całego układu: $E_K = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{3} m_S\right)\dot{x}^2$
Efektywna masa sprężyny jest trzykrotnie mniejsza od jej masy.

Okres drgań układu: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m+m_{Sef}}{k}}$

Opis drgań w postaci zespolonej

Równanie jednowymiarowego ruchu drgającego: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Opis drgań w postaci zespolonej

Równanie jednowymiarowego ruchu drgającego: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Szukamy rozwiązania w postaci: $x = Ae^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = A\lambda^2 e^{\lambda t}$

Opis drgań w postaci zespolonej

Równanie jednowymiarowego ruchu drgającego: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Szukamy rozwiązania w postaci: $x = Ae^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = A\lambda^2 e^{\lambda t}$

Po podstawieniu do równania ruchu otrzymujemy *równanie charakterystyczne*:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i\omega$$

Opis drgań w postaci zespolonej

Równanie jednowymiarowego ruchu drgającego: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Szukamy rozwiązania w postaci: $x = Ae^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = A\lambda^2 e^{\lambda t}$

Po podstawieniu do równania ruchu otrzymujemy *równanie charakterystyczne*:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i\omega$$

Rozwiązanie zespolone: $x = Ae^{i\omega t} = A\left[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right]$
Sens fizyczny ma tylko część rzeczywista rozwiązania: $\mathrm{Re}\, x = A\cos(\omega t)$

Opis drgań w postaci zespolonej

Równanie jednowymiarowego ruchu drgającego: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Szukamy rozwiązania w postaci: $x = Ae^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = A\lambda^2 e^{\lambda t}$

Po podstawieniu do równania ruchu otrzymujemy *równanie charakterystyczne*:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm i\omega$$

Rozwiązanie zespolone: $x = Ae^{i\omega t} = A\left[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\right]$
Sens fizyczny ma tylko część rzeczywista rozwiązania: $\mathrm{Re}\, x = A\cos(\omega t)$

Fazor (wektor fazowy)

to wektor o długości równej *amplitudzie drgań*, nachylony do osi rzeczywistej pod kątem równym *fazie*.
Ruch harmoniczny to wirowanie *fazorów*.

Składanie drgań harmonicznych

Z liniowego związku pomiędzy wychyleniem a siłą w układach harmonicznych otrzymujemy **zasadę superpozycji** drgań:
wychylenie w danej chwili jest sumą wychyleń każdego elementu układu, wywołanych przez każdy czynnik osobno.

$$x = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin\left(\omega_i t + \vartheta_i\right)$$

Składanie drgań harmonicznych

Z liniowego związku pomiędzy wychyleniem a siłą w układach harmonicznych otrzymujemy **zasadę superpozycji** drgań:
wychylenie w danej chwili jest sumą wychyleń każdego elementu układu, wywołanych przez każdy czynnik osobno.

$$x = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin\left(\omega_i t + \vartheta_i\right)$$

a. Składanie dwóch drgań o tym samym kierunku, różnych amplitudach, tej samej częstości, różniących się w fazie o ϑ.

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin\left(\omega t\right) \\ x_2 &= A_2 \sin\left(\omega t + \vartheta\right) = A_2 \left[\cos\vartheta \sin\left(\omega t\right) + \sin\vartheta \cos\left(\omega t\right)\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x &= x_1 + x_2 = (A_1 + A_2 \cos\vartheta)\sin(\omega t) + A_2 \sin\vartheta \cos(\omega t) \\
&= A\left[\cos\varphi \sin(\omega t) + \sin\varphi \cos(\omega t)\right] = A \sin(\omega t + \varphi)
\end{aligned}
$$

Dowolną parę liczb rzeczywistych można przedstawić za pomocą $A\cos\varphi$ i $A\sin\varphi$. Z transformacji dla współrzędnych biegunowych:

$$
A = \sqrt{(A_1 + A_2\cos\vartheta)^2 + (A_2\sin\vartheta)^2}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{A_2\sin\vartheta}{A_1 + A_2\cos\vartheta}
$$

Wypadkowa amplituda drgań osiąga największą wartość dla $\vartheta = 2k\pi$, a najmniejszą dla $\vartheta = (2k+1)\pi$.

$$
\begin{aligned}
x &= x_1 + x_2 = (A_1 + A_2 \cos\vartheta)\sin(\omega t) + A_2 \sin\vartheta \cos(\omega t) \\
&= A\left[\cos\varphi \sin(\omega t) + \sin\varphi \cos(\omega t)\right] = A \sin(\omega t + \varphi)
\end{aligned}
$$

Dowolną parę liczb rzeczywistych można przedstawić za pomocą $A\cos\varphi$ i $A\sin\varphi$. Z transformacji dla współrzędnych biegunowych:

$$
A = \sqrt{(A_1 + A_2\cos\vartheta)^2 + (A_2\sin\vartheta)^2}, \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{A_2\sin\vartheta}{A_1 + A_2\cos\vartheta}
$$

Wypadkowa amplituda drgań osiąga największą wartość dla $\vartheta = 2k\pi$, a najmniejszą dla $\vartheta = (2k+1)\pi$.

Wynik superpozycji można interpretować geometrycznie jako sumę *wektorów fazowych*: $\vec{A} = \sum_{i=1}^{n} \vec{A}_i$

b. Składanie dwóch drgań o tym samym kierunku, różnych amplitudach i fazach, oraz podobnych częstościach – **dudnienia**.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= A_1 \sin(\omega_1 t) \\
x_2 &= A_2 \sin(\omega_2 t + \vartheta) = A_2 \sin\{\omega_1 t - [(\omega_1 - \omega_2) t - \vartheta]\}
\end{aligned}
$$

b. Składanie dwóch drgań o tym samym kierunku, różnych amplitudach i fazach, oraz podobnych częstościach – **dudnienia**.

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \sin(\omega_1 t) \\ x_2 &= A_2 \sin(\omega_2 t + \vartheta) = A_2 \sin\{\omega_1 t - [(\omega_1 - \omega_2) t - \vartheta]\} \end{aligned}$$

Podstawiamy w wyprowadzeniu z części a. za ϑ wyrażenie:

$$-[(\omega_1 - \omega_2) t - \vartheta]$$

otrzymujemy: $x = x_1 + x_2 = A \sin(\omega_1 t + \varphi)$

gdzie amplituda drgań wypadkowych zależy od czasu:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\{A_1 + A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2) t - \vartheta]\}^2 + \{A_2 \sin[(\omega_1 - \omega_2) t - \vartheta]\}^2} \\ &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2) t - \vartheta]} \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{-A_2 \sin[(\omega_1 - \omega_2) t - \vartheta]}{A_1 + A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2) t - \vartheta]} \end{aligned}$$

Okres zmienności: $T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} \quad \Rightarrow \quad \nu_d = \frac{1}{T} = \nu_1 - \nu_2$

Jeśli częstości obu drgań mechanicznych leżą w zakresie słyszalności, a ich różnica jest poniżej 16 Hz, to można usłyszeć rytmiczne powtarzanie się maksimów amplitudy o częstości ν_d, zwane **dudnieniami**.

Okres zmienności: $T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} \quad \Rightarrow \quad \nu_d = \frac{1}{T} = \nu_1 - \nu_2$

Jeśli częstości obu drgań mechanicznych leżą w zakresie słyszalności, a ich różnica jest poniżej 16 Hz, to można usłyszeć rytmiczne powtarzanie się maksimów amplitudy o częstości ν_d, zwane **dudnieniami**.

Przez odpowiednią superpozycję uzyskuje się **drgania modulowane** o okresowej amplitudzie np.

$$x = [B_1 + B_2 \cos(\theta_1 t)] \sin(\theta t)$$

częstość drgań podstawowych: $\theta = \omega_1$
częstość drgań modulujących $\theta_1 = \omega_1 - \omega_2$
$B_1 = A_1^2 + A_2^2$
$B_2 = 2A_1A_2$

Krzywe Lissajous

Składamy ze sobą drgania prostopadłe do siebie wzdłuż osi x i y, różniące się w fazie:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_x t) \qquad y(t) = y_0 \sin(\omega_y t - \vartheta)$$

Krzywe Lissajous

Składamy ze sobą drgania prostopadłe do siebie wzdłuż osi x i y, różniące się w fazie:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_x t) \qquad y(t) = y_0 \sin(\omega_y t - \vartheta)$$

Jeśli częstości drgań są sobie równe, torem ruchu jest elipsa lub odcinek ($\vartheta = k\pi$), w zależności od różnicy faz drgań składowych.

Krzywe Lissajous

Składamy ze sobą drgania prostopadłe do siebie wzdłuż osi x i y, różniące się w fazie:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_x t) \qquad y(t) = y_0 \sin(\omega_y t - \vartheta)$$

Jeśli częstości drgań są sobie równe, torem ruchu jest elipsa lub odcinek ($\vartheta = k\pi$), w zależności od różnicy faz drgań składowych.

Jeśli składane drgania różnią się częstościami, różnica faz jest liniową funkcją czasu. Przy wymiernym stosunku częstości obu drgań ($p/q \quad p, q \in N/\{0\}$) tor staje się krzywą zamkniętą. Cykl się powtarza po czasie $T' = pqT$, gdzie pT jest okresem jednych drgań, a qT okresem drugich.

Drgania tłumione

Siła oporu ruchu w ogólnym przypadku zależy od prędkości: $\vec{F}_o = -f(v)\,\vec{v}$

Drgania tłumione

Siła oporu ruchu w ogólnym przypadku zależy od prędkości: $\vec{F}_o = -f(v)\,\vec{v}$

Praca oporów ruchu jest zawsze ujemna, a energia ulega nieodwracalnemu rozproszeniu w postaci ciepła.

Drgania tłumione

Siła oporu ruchu w ogólnym przypadku zależy od prędkości: $\vec{F}_o = -f(v)\,\vec{v}$

Praca oporów ruchu jest zawsze ujemna, a energia ulega nieodwracalnemu rozproszeniu w postaci ciepła.

Rodzaje oporów ruchu:

μ – współczynnik tarcia
F_N – siła nacisku
$b = \mathrm{const}$

Drgania tłumione

Siła oporu ruchu w ogólnym przypadku zależy od prędkości: $\vec{F}_o = -f(v)\,\vec{v}$

Praca oporów ruchu jest zawsze ujemna, a energia ulega nieodwracalnemu rozproszeniu w postaci ciepła.

Rodzaje oporów ruchu:

1. tarcie poślizgowe (kulombowskie, suche) $T = \mu F_N$,

μ – współczynnik tarcia
F_N – siła nacisku
$b = \mathrm{const}$

Drgania tłumione

Siła oporu ruchu w ogólnym przypadku zależy od prędkości: $\vec{F}_o = -f(v)\,\vec{v}$

Praca oporów ruchu jest zawsze ujemna, a energia ulega nieodwracalnemu rozproszeniu w postaci ciepła.

Rodzaje oporów ruchu:

1. tarcie poślizgowe (kulombowskie, suche) $T = \mu F_N$,
2. tarcie wewnętrzne (wiskotyczne, lepkość) $T = bv$,

μ – współczynnik tarcia
F_N – siła nacisku
$b = \mathrm{const}$

Drgania tłumione

Siła oporu ruchu w ogólnym przypadku zależy od prędkości: $\vec{F}_o = -f(v)\,\vec{v}$

Praca oporów ruchu jest zawsze ujemna, a energia ulega nieodwracalnemu rozproszeniu w postaci ciepła.

Rodzaje oporów ruchu:

1. tarcie poślizgowe (kulombowskie, suche) $T = \mu F_N$,
2. tarcie wewnętrzne (wiskotyczne, lepkość) $T = bv$,
3. opór hydrodynamiczny $T = bv^2$,

μ – współczynnik tarcia
F_N – siła nacisku
$b = \mathrm{const}$

Drgania tłumione wiskotycznie

Z II Zasady Dynamiki:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

współczynnik tłumienia: $\beta = \frac{b}{2m}$

częstość kołowa odpowiadających drgań nietłumionych, nazywa się

częstością drgań własnych: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Drgania tłumione wiskotycznie

Z II Zasady Dynamiki:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

współczynnik tłumienia: $\beta = \frac{b}{2m}$

częstość kołowa odpowiadających drgań nietłumionych, nazywa się

częstością drgań własnych: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Korzystamy z podstawienia: $x = Ae^{\lambda t}$

stąd: $\dot{x} = \lambda Ae^{\lambda t}$ $\quad \ddot{x} = \lambda^2 Ae^{\lambda t}$

Drgania tłumione wiskotycznie

Z II Zasady Dynamiki:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

współczynnik tłumienia: $\beta = \frac{b}{2m}$

częstość kołowa odpowiadających drgań nietłumionych, nazywa się

częstością drgań własnych: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Korzystamy z podstawienia: $x = Ae^{\lambda t}$

stąd: $\dot{x} = \lambda Ae^{\lambda t}$ $\quad \ddot{x} = \lambda^2 Ae^{\lambda t}$

Po podstawieniu rozwiązania i jego pochodnych do równania otrzymujemy

równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$

dla $\beta < \omega_0$ ma dwa pierwiastki: $\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm i\omega$

gdzie $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ jest częstością kołową ruchu tłumionego.

Rozwiązaniem jest kombinacja liniowa ze współczynnikami sprzężonymi:

$$x = A_1 e^{(-\beta+i\omega)t} + A_2 e^{(-\beta-i\omega)t} = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\right)$$

współczynniki te można zastąpić przez $A_1 = \frac{A_0}{2} e^{i\vartheta}$ oraz $A_2 = \frac{A_0}{2} e^{-i\vartheta}$, korzystając z $\cos\Theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\Theta} + e^{-i\Theta}\right)$ otrzymujemy:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \vartheta)$$

Rozwiązaniem jest kombinacja liniowa ze współczynnikami sprzężonymi:

$$x = A_1 e^{(-\beta+i\omega)t} + A_2 e^{(-\beta-i\omega)t} = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\right)$$

współczynniki te można zastąpić przez $A_1 = \frac{A_0}{2} e^{i\vartheta}$ oraz $A_2 = \frac{A_0}{2} e^{-i\vartheta}$, korzystając z $\cos\Theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\Theta} + e^{-i\Theta}\right)$ otrzymujemy:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \vartheta)$$

Rozwiązanie można zinterpretować geometrycznie jako wirujący *fazor* o malejącej długości (amplitudzie): $A = A_0 e^{-\beta t}$

Rozwiązaniem jest kombinacja liniowa ze współczynnikami sprzężonymi:

$$x = A_1 e^{(-\beta+i\omega)t} + A_2 e^{(-\beta-i\omega)t} = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\right)$$

współczynniki te można zastąpić przez $A_1 = \frac{A_0}{2} e^{i\vartheta}$ oraz $A_2 = \frac{A_0}{2} e^{-i\vartheta}$, korzystając z $\cos\Theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\Theta} + e^{-i\Theta}\right)$ otrzymujemy:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \vartheta)$$

Rozwiązanie można zinterpretować geometrycznie jako wirujący *fazor* o malejącej długości (amplitudzie): $A = A_0 e^{-\beta t}$

Z postaci **czynnika tłumienia** $e^{-\beta t}$ uzyskujemy stałą wielkość zwaną **logarytmicznym dekrementem tłumienia**, będącym logarytmem ze stosunku kolejnych amplitud:

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T$$

Rozwiązaniem jest kombinacja liniowa ze współczynnikami sprzężonymi:

$$x = A_1 e^{(-\beta+i\omega)t} + A_2 e^{(-\beta-i\omega)t} = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\right)$$

współczynniki te można zastąpić przez $A_1 = \frac{A_0}{2} e^{i\vartheta}$ oraz $A_2 = \frac{A_0}{2} e^{-i\vartheta}$, korzystając z $\cos\Theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\Theta} + e^{-i\Theta}\right)$ otrzymujemy:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \vartheta)$$

Rozwiązanie można zinterpretować geometrycznie jako wirujący *fazor* o malejącej długości (amplitudzie): $A = A_0 e^{-\beta t}$

Z postaci **czynnika tłumienia** $e^{-\beta t}$ uzyskujemy stałą wielkość zwaną **logarytmicznym dekrementem tłumienia**, będącym logarytmem ze stosunku kolejnych amplitud:

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \beta T$$

Czas relaksacji τ

to czas po którym amplituda zmaleje e razy:

$$e = \frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{\beta} = \frac{T}{\delta}$$

Oscylator silnie tłumiony

Jeśli *współczynnik tłumienia* jest większy od częstości drgań nietłumionych, oba pierwiastki *równania charakterystycznego* są rzeczywiste:

$$\beta > \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Oscylator silnie tłumiony

Jeśli *współczynnik tłumienia* jest większy od częstości drgań nietłumionych, oba pierwiastki *równania charakterystycznego* są rzeczywiste:

$$\beta > \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Rozwiązanie ogólne jest kombinacją wyrazów wykładniczych:

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}\right)$$

Do drgań nie dochodzi. Ruch jest *aperiodyczny*.

Oscylator silnie tłumiony

Jeśli *współczynnik tłumienia* jest większy od częstości drgań nietłumionych, oba pierwiastki *równania charakterystycznego* są rzeczywiste:

$$\beta > \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Rozwiązanie ogólne jest kombinacją wyrazów wykładniczych:

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t} + A_2 e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}\right)$$

Do drgań nie dochodzi. Ruch jest *aperiodyczny*.

Tłumienie krytyczne

zachodzi gdy *współczynnik tłumienia* jest równy *pulsacji* drgań nietłumionych: $\beta = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\beta$

Rozwiązanie ogólne jest sumą: $x(t) = (A_1 + A_2 t)\, e^{-\beta t}$

Drgania wymuszone

Drgania wymuszone

powstają poprzez dodanie do układu *zmiennej siły zewnętrznej*, wywołującej drgania o tej samej częstości co ta siła.

Drgania wymuszone

Drgania wymuszone

powstają poprzez dodanie do układu *zmiennej siły zewnętrznej*, wywołującej drgania o tej samej częstości co ta siła.

Zjawisko to występuje w dwóch fazach:

Drgania wymuszone

Drgania wymuszone

powstają poprzez dodanie do układu *zmiennej siły zewnętrznej*, wywołującej drgania o tej samej częstości co ta siła.

Zjawisko to występuje w dwóch fazach:

1. stan przejściowy (nieustalony) – przyrost amplitudy,

Drgania wymuszone

Drgania wymuszone

powstają poprzez dodanie do układu *zmiennej siły zewnętrznej*, wywołującej drgania o tej samej częstości co ta siła.

Zjawisko to występuje w dwóch fazach:

1. stan przejściowy (nieustalony) – przyrost amplitudy,
2. stan ustalony (stacjonarny) – o stałej amplitudzie.

Drgania wymuszone

Drgania wymuszone

powstają poprzez dodanie do układu *zmiennej siły zewnętrznej*, wywołującej drgania o tej samej częstości co ta siła.

Zjawisko to występuje w dwóch fazach:

1. stan przejściowy (nieustalony) – przyrost amplitudy,
2. stan ustalony (stacjonarny) – o stałej amplitudzie.

Siła wywołująca drgania: $F = F_0 \sin(\Omega t)$

z Drugiej Zasady Dynamiki:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \sin(\Omega t) \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 \sin(\Omega t)$$

Stan ustalony

Doświadczenie pokazuje, że drgania w *stanie ustalonym* mają tę samą częstość, co wymuszająca siła i są względem niej spóźnione w fazie.

Stan ustalony

Doświadczenie pokazuje, że drgania w *stanie ustalonym* mają tę samą częstość, co wymuszająca siła i są względem niej spóźnione w fazie.

Równanie ruchu w postaci zespolonej: $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 e^{i\Omega t}$
rozwiązanie: $x = Ae^{i(\Omega t - \vartheta)}$
równanie charakterystyczne: $-A\Omega^2 + 2iA\beta\Omega + A\omega_0^2 = a_0 e^{i\vartheta}$

Stan ustalony

Doświadczenie pokazuje, że drgania w *stanie ustalonym* mają tę samą częstość, co wymuszająca siła i są względem niej spóźnione w fazie.

Równanie ruchu w postaci zespolonej: $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 e^{i\Omega t}$
rozwiązanie: $x = Ae^{i(\Omega t - \vartheta)}$
równanie charakterystyczne: $-A\Omega^2 + 2iA\beta\Omega + A\omega_0^2 = a_0 e^{i\vartheta}$

Obliczając moduł z tego równania otrzymujemy amplitudę drgań:

$$A\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2} = a_0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

Stan ustalony

Doświadczenie pokazuje, że drgania w *stanie ustalonym* mają tę samą częstość, co wymuszająca siła i są względem niej spóźnione w fazie.

Równanie ruchu w postaci zespolonej: $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = a_0 e^{i\Omega t}$
rozwiązanie: $x = Ae^{i(\Omega t - \vartheta)}$
równanie charakterystyczne: $-A\Omega^2 + 2iA\beta\Omega + A\omega_0^2 = a_0 e^{i\vartheta}$

Obliczając moduł z tego równania otrzymujemy amplitudę drgań:

$$A\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2} = a_0 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

Opóźnienie fazowe:

$$\vartheta = \mathrm{arctg}\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$\begin{aligned} \Omega \to 0 \quad &\Rightarrow \quad \vartheta \to 0 \\ \Omega \to \omega_0 \quad &\Rightarrow \quad \vartheta \to \frac{\pi}{2} \\ \Omega \to \infty \quad &\Rightarrow \quad \vartheta \to \pi \end{aligned}$$

Rezonans wychylenia

Amplituda drgań wymuszonych zależy od ich częstości. Wykres tej zależności nazywa się **krzywą rezonansową**.

Rezonans wychylenia

Amplituda drgań wymuszonych zależy od ich częstości. Wykres tej zależności nazywa się **krzywą rezonansową**.

Amplituda przy pewnej częstości Ω_R osiąga maksimum.
Zjawisko to nazywamy **rezonansem**, a Ω_R **częstością rezonansową**.

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\Omega}\left[\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2\right] &= 2\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)(-2\Omega)+8\beta^2\Omega \\ &= 4\left(\Omega^2-\omega_0^2+2\beta^2\right)\Omega=0\end{aligned}$$

stąd częstość rezonansowa: $\Omega_R=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$

Wartość amplitudy w rezonansie:

$$A_R = \frac{F_0}{m\sqrt{\left[\omega_0^2 - \left(\omega_0^2 - 2\beta^2\right)\right]^2 + 4\beta^2\left(\omega_0^2 - 2\beta^2\right)}} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{F_0}{b\omega}$$

ω – częstość drgań tłumionych
b – współczynnik oporów ruchu

Wartość amplitudy w rezonansie:

$$A_R = \frac{F_0}{m\sqrt{\left[\omega_0^2 - \left(\omega_0^2 - 2\beta^2\right)\right]^2 + 4\beta^2\left(\omega_0^2 - 2\beta^2\right)}} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} = \frac{F_0}{b\omega}$$

ω – częstość drgań tłumionych
b – współczynnik oporów ruchu

Różnica faz w rezonansie:

$$\vartheta_R = \mathrm{arctg}\frac{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}{\omega_0^2 - \left(\omega_0^2 - 2\beta^2\right)} = \mathrm{arctg}\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\beta}\right)^2 - 2} = \mathrm{arctg}\frac{\Omega_R}{\beta}$$

Drgania tłumione kulombowsko

Zakładamy warunki początkowe ruchu: $x(0) = A_0 > \frac{F_C}{k}$, $\dot{x}(0) = 0$,
A_0 – amplituda początkowa drgań
Z II Zasady Dynamiki: $m\ddot{x} = -kx - F_C \mathrm{sgn}(\dot{x})$

Drgania tłumione kulombowsko

Zakładamy warunki początkowe ruchu: $x(0) = A_0 > \frac{F_C}{k}$, $\dot{x}(0) = 0$,
A_0 – amplituda początkowa drgań
Z II Zasady Dynamiki: $m\ddot{x} = -kx - F_C \mathrm{sgn}(\dot{x})$

Ze względu na zależność zwrotu stałej siły tarcia F_C od zwrotu prędkości, równanie ruchu musimy rozwiązywać oddzielnie dla każdej fazy ruchu z danym zwrotem siły tarcia.

Drgania tłumione kulombowsko

Zakładamy warunki początkowe ruchu: $x(0) = A_0 > \frac{F_C}{k}$, $\dot{x}(0) = 0$,
A_0 – amplituda początkowa drgań
Z II Zasady Dynamiki: $m\ddot{x} = -kx - F_C \mathrm{sgn}(\dot{x})$

Ze względu na zależność zwrotu stałej siły tarcia F_C od zwrotu prędkości, równanie ruchu musimy rozwiązywać oddzielnie dla każdej fazy ruchu z danym zwrotem siły tarcia.

W pierwszej fazie ruchu gdy $\dot{x} \leqslant 0$: $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{F_C}{m} = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{F_C}{k}\right)$

Drgania tłumione kulombowsko

Zakładamy warunki początkowe ruchu: $x(0) = A_0 > \frac{F_C}{k}$, $\dot{x}(0) = 0$,
A_0 – amplituda początkowa drgań
Z II Zasady Dynamiki: $m\ddot{x} = -kx - F_C \mathrm{sgn}(\dot{x})$

Ze względu na zależność zwrotu stałej siły tarcia F_C od zwrotu prędkości, równanie ruchu musimy rozwiązywać oddzielnie dla każdej fazy ruchu z danym zwrotem siły tarcia.

W pierwszej fazie ruchu gdy $\dot{x} \leqslant 0$: $\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{F_C}{m} = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{F_C}{k}\right)$

W każdej fazie ruchu ciało porusza się ruchem analogicznym do harmonicznego nietłumionego. Jednak "położenie równowagi jest rozbite" na dwa punkty poprzez przesunięcie o $x_1 = \frac{F_C}{k}$, z miejsca dla ruchu nietłumionego w kierunku do początku danej fazy ruchu. Na przemian zmienia swoje położenie na takie, w którym siła sprężystości równoważy się z siłą tarcia.

Mamy więc dla pierwszej fazy ruchu: $\ddot{x} = -\omega_0^2 (x - x_1)$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – częstość odpowiadających drgań nietłumionych.

Mamy więc dla pierwszej fazy ruchu: $\ddot{x} = -\omega_0^2 (x - x_1)$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – częstość odpowiadających drgań nietłumionych.

Poprzez analogię z drganiami nietłumionymi:

$$x - x_1 = A \sin(\omega_0 t + \vartheta), \quad \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \vartheta).$$

Mamy więc dla pierwszej fazy ruchu: $\ddot{x} = -\omega_0^2 (x - x_1)$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – częstość odpowiadających drgań nietłumionych.

Poprzez analogię z drganiami nietłumionymi:

$$x - x_1 = A \sin(\omega_0 t + \vartheta), \quad \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \vartheta).$$

Z warunków początkowych obliczamy *amplitudę* A i *przesunięcie fazowe* ϑ:

$\dot{x}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = A\omega_0 \cos\vartheta \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$

$x(0) = A_0 \quad \Rightarrow \quad A_0 - x_1 = A \sin\vartheta = A \sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm A$

Stąd równanie ruchu: $x(t) = x_1 + (A_0 - x_1)\cos(\omega_0 t)$

W drugiej fazie ruchu gdy $\dot{x} \geqslant 0$: $\ddot{x} = -\omega_0^2 (x - x_2)$
"Położenie równowagi" tej fazy ruchu: $x_2 = -x_1 = -\frac{F_C}{k}$

W drugiej fazie ruchu gdy $\dot{x} \geqslant 0$: $\ddot{x} = -\omega_0^2 (x - x_2)$
"Położenie równowagi" tej fazy ruchu: $x_2 = -x_1 = -\frac{F_C}{k}$

Rozwiązanie ma postać:

$$x - x_2 = A' \sin(\omega_0 t + \vartheta), \quad \dot{x} = A' \omega_0 \cos(\omega_0 t + \vartheta).$$

W drugiej fazie ruchu gdy $\dot{x} \geqslant 0$: $\quad \ddot{x} = -\omega_0^2 (x - x_2)$
"Położenie równowagi" tej fazy ruchu: $\quad x_2 = -x_1 = -\frac{F_C}{k}$

Rozwiązanie ma postać:

$$x - x_2 = A' \sin(\omega_0 t + \vartheta), \qquad \dot{x} = A'\omega_0 \cos(\omega_0 t + \vartheta).$$

Z warunków brzegowych sklejenia:
$\dot{x}\left(\frac{T}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$x\left(\frac{T}{2}\right) = -A_0 + 2x_1 \quad \Rightarrow$
$-A_0 + 2x_1 - x_2 = -A_0 + 3x_1 = A' \sin(\pi + \vartheta) = A' \sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm A'$
Stąd równanie ruchu: $\quad x(t) = -x_1 + (A_0 - 3x_1)\cos(\omega_0 t)$

W drugiej fazie ruchu gdy $\dot{x} \geqslant 0$: $\quad \ddot{x} = -\omega_0^2 (x - x_2)$
"Położenie równowagi" tej fazy ruchu: $\quad x_2 = -x_1 = -\frac{F_C}{k}$

Rozwiązanie ma postać:

$$x - x_2 = A' \sin(\omega_0 t + \vartheta), \qquad \dot{x} = A'\omega_0 \cos(\omega_0 t + \vartheta).$$

Z warunków brzegowych sklejenia:
$\dot{x}\left(\frac{T}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n$
$x\left(\frac{T}{2}\right) = -A_0 + 2x_1 \quad \Rightarrow$
$-A_0 + 2x_1 - x_2 = -A_0 + 3x_1 = A' \sin(\pi + \vartheta) = A' \sin\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \pm A'$
Stąd równanie ruchu: $\quad x(t) = -x_1 + (A_0 - 3x_1)\cos(\omega_0 t)$

Po upływie jednego okresu amplituda zmniejszyła się do:

$$x(T) = A_0 - 4x_1$$

Poprzez kolejne iteracje otrzymujemy ogólne rozwiązanie dla położenia w n-tej połówce okresu drgań (fazie ruchu):

$$x(t) = (-1)^{n-1} x_1 + [A_0 - (2n-1) x_1] \cos(\omega_0 t)$$

Poprzez kolejne iteracje otrzymujemy ogólne rozwiązanie dla położenia w n-tej połówce okresu drgań (fazie ruchu):

$$x(t) = (-1)^{n-1} x_1 + [A_0 - (2n-1) x_1] \cos(\omega_0 t)$$

W płaszczyźnie zespolonej *wektor fazowy* na przemian ma początek w x_1 i x_2, a jego długość zmniejsza się o $2x_1$ z każdą zmianą zwrotu prędkości. Przypomina to zwijanie tego *wektora fazowego* wokół odcinka o końcach $x_1 - x_2$.
Ciało zatrzymuje się w momencie nałożenia się *wektora fazowego* na oś rzeczywistą gdy: $x_2 \leqslant x\left(n\frac{T}{2}\right) \leqslant x_1$.

Poprzez kolejne iteracje otrzymujemy ogólne rozwiązanie dla położenia w n-tej połówce okresu drgań (fazie ruchu):

$$x(t) = (-1)^{n-1} x_1 + [A_0 - (2n-1) x_1] \cos(\omega_0 t)$$

W płaszczyźnie zespolonej *wektor fazowy* na przemian ma początek w x_1 i x_2, a jego długość zmniejsza się o $2x_1$ z każdą zmianą zwrotu prędkości. Przypomina to zwijanie tego *wektora fazowego* wokół odcinka o końcach $x_1 - x_2$.
Ciało zatrzymuje się w momencie nałożenia się *wektora fazowego* na oś rzeczywistą gdy: $x_2 \leqslant x\left(n\frac{T}{2}\right) \leqslant x_1$.

Ze względu na ten sam współczynnik proporcjonalności siły do wychylenia, okres drgań będzie identyczny z okresem drgań nietłumionych.
W przypadku rozpoczęcia ruchu z zerową prędkością, czas jego trwania będzie równy wielokrotności połówek jego okresu: $t_C = N\frac{T}{2}$, gdzie $N = \left[\frac{A_0+x_1}{2x_1}\right]$ jest liczbą "nawinięć" wektora fazowego.