Szczególna teoria względności

Zdarzenie

to zjawisko fizyczne, którego rozciągłość w przestrzeni i czas trwania możemy pominąć. Charakteryzuje je więc punkt przestrzeni x, y, z i chwila t, w której zjawisko nastąpiło.

Szczególna teoria względności

Zdarzenie

to zjawisko fizyczne, którego rozciągłość w przestrzeni i czas trwania możemy pominąć. Charakteryzuje je więc punkt przestrzeni x, y, z i chwila t, w której zjawisko nastąpiło.

Załóżmy, że układ inercjalny U' porusza się względem drugiego układu inercjalnego U z prędkością $\vec{u}$ wzdłuż osi x. Osie obu układów są do siebie równoległe. Dla czasu $t = t' = 0$ początki układów współrzędnych się pokrywają.

Zakładamy, że światło porusza się ze stałą prędkością c we wszystkich kierunkach. Obserwator O umieszczony w początku układu współrzędnych U mierzy współrzędne pewnego zdarzenia poprzez wysłanie sygnału świetlnego w chwili $t_1 = t - \frac{x}{c}$. Sygnał ten ulega odbiciu od punktu materialnego P, leżącego na osi x i wraca do obserwatora O w chwili $t_2 = t + \frac{x}{c}$. W taki "radarowy" sposób obserwator O ustala współrzędne zdarzenia w punkcie
$P\ \left[x = \frac{1}{2}c\left(t_2 - t_1\right), t = \frac{1}{2}\left(t_1 + t_2\right)\right]$.

Zakładamy, że światło porusza się ze stałą prędkością c we wszystkich kierunkach. Obserwator O umieszczony w początku układu współrzędnych U mierzy współrzędne pewnego zdarzenia poprzez wysłanie sygnału świetlnego w chwili $t_1 = t - \frac{x}{c}$. Sygnał ten ulega odbiciu od punktu materialnego P, leżącego na osi x i wraca do obserwatora O w chwili $t_2 = t + \frac{x}{c}$. W taki "radarowy" sposób obserwator O ustala współrzędne zdarzenia w punkcie
$P\ \left[x = \frac{1}{2}c\left(t_2 - t_1\right), t = \frac{1}{2}\left(t_1 + t_2\right)\right]$.

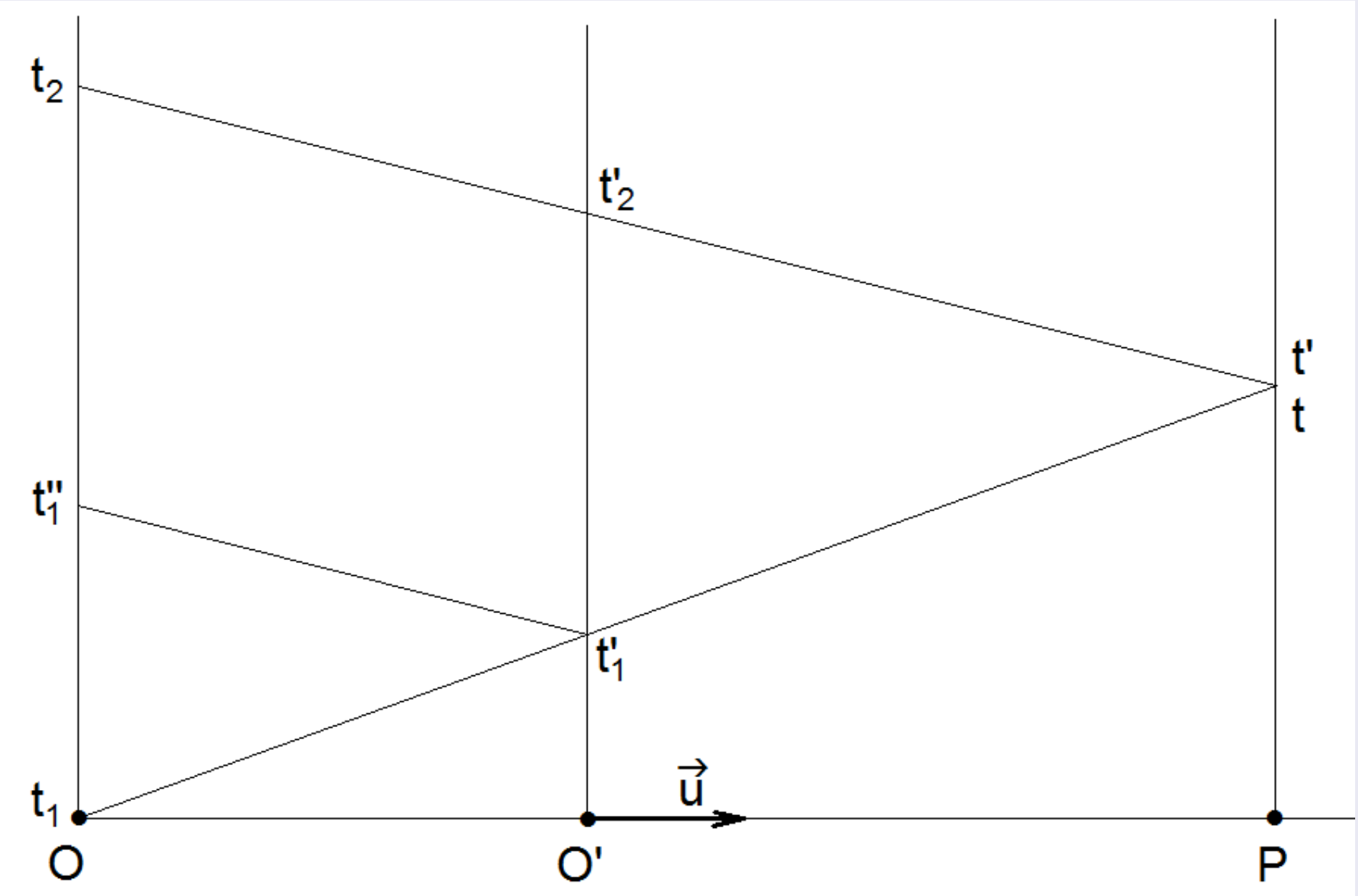
W taki sam sposób obserwator O' znajdujący się w początku układu współrzędnych U', poruszającego się w kierunku punktu P, wyznacza współrzędne punktu $P\ \left[x' = \frac{1}{2}c\left(t_2' - t_1'\right), t' = \frac{1}{2}\left(t_1' + t_2'\right)\right]$.

Zakładamy, że światło porusza się ze stałą prędkością c we wszystkich kierunkach. Obserwator O umieszczony w początku układu współrzędnych U mierzy współrzędne pewnego zdarzenia poprzez wysłanie sygnału świetlnego w chwili $t_1 = t - \frac{x}{c}$. Sygnał ten ulega odbiciu od punktu materialnego P, leżącego na osi x i wraca do obserwatora O w chwili $t_2 = t + \frac{x}{c}$. W taki "radarowy" sposób obserwator O ustala współrzędne zdarzenia w punkcie
$P\ \left[x = \frac{1}{2}c\left(t_2 - t_1\right), t = \frac{1}{2}\left(t_1 + t_2\right)\right]$.

W taki sam sposób obserwator O' znajdujący się w początku układu współrzędnych U', poruszającego się w kierunku punktu P, wyznacza współrzędne punktu $P\ \left[x' = \frac{1}{2}c\left(t_2' - t_1'\right), t' = \frac{1}{2}\left(t_1' + t_2'\right)\right]$.

Aby znaleźć związek między t_1 i t_1' zakładamy, że obserwator O ustala współrzędne metodą "radarową" obserwatora O', oddalającego się od niego z prędkością $u = \frac{s}{\tau}$:
$s = \frac{1}{2}c\left(t_1'' - t_1\right)$, $\tau = \frac{1}{2}\left(t_1'' + t_1\right)$.

Droga sygnału świetlnego



Obserwator O wysłał sygnał świetlny w chwili t_1 mierzonej w swoim układzie U, sygnał ten dotarł do obserwatora O' w chwili t_1' mierzonej w układzie U'. Przyjmijmy, że zmierzone czasy są do siebie proporcjonalne ($t_1' = At_1$) poprzez stałą A zależną od prędkości względnej układów u. Po odbiciu od obserwatora O' sygnał powrócił do obserwatora O w chwili t_1''. Ponieważ **wynik pomiaru prędkości u oddalania się układów w obu układach musi być identyczny, ze względu na symetrię** zachodzi związek $t_1'' = At_1'$ z tą samą stałą A.

Obserwator O wysłał sygnał świetlny w chwili t_1 mierzonej w swoim układzie U, sygnał ten dotarł do obserwatora O' w chwili t_1' mierzonej w układzie U'. Przyjmijmy, że zmierzone czasy są do siebie proporcjonalne ($t_1' = At_1$) poprzez stałą A zależną od prędkości względnej układów u. Po odbiciu od obserwatora O' sygnał powrócił do obserwatora O w chwili t_1''. Ponieważ **wynik pomiaru prędkości u oddalania się układów w obu układach musi być identyczny, ze względu na symetrię** zachodzi związek $t_1'' = At_1'$ z tą samą stałą A.

Stąd $t_1'' = A^2 t_1$, $u = \frac{s}{\tau} = \frac{\frac{1}{2}c\left(t_1''-t_1\right)}{\frac{1}{2}\left(t_1''+t_1\right)}$

Obserwator O wysłał sygnał świetlny w chwili t_1 mierzonej w swoim układzie U, sygnał ten dotarł do obserwatora O' w chwili t_1' mierzonej w układzie U'. Przyjmijmy, że zmierzone czasy są do siebie proporcjonalne ($t_1' = At_1$) poprzez stałą A zależną od prędkości względnej układów u. Po odbiciu od obserwatora O' sygnał powrócił do obserwatora O w chwili t_1''. Ponieważ **wynik pomiaru prędkości u oddalania się układów w obu układach musi być identyczny, ze względu na symetrię** zachodzi związek $t_1'' = At_1'$ z tą samą stałą A.

Stąd $t_1'' = A^2 t_1$, $u = \frac{s}{\tau} = \frac{\frac{1}{2}c\left(t_1''-t_1\right)}{\frac{1}{2}\left(t_1''+t_1\right)}$

$$\beta \equiv \frac{u}{c} = \frac{t_1''-t_1}{t_1''+t_1} = \frac{A^2 t_1 - t_1}{A^2 t_1 + t_1} = \frac{A^2-1}{A^2+1}$$

Obserwator O wysłał sygnał świetlny w chwili t_1 mierzonej w swoim układzie U, sygnał ten dotarł do obserwatora O' w chwili t_1' mierzonej w układzie U'. Przyjmijmy, że zmierzone czasy są do siebie proporcjonalne ($t_1' = At_1$) poprzez stałą A zależną od prędkości względnej układów u. Po odbiciu od obserwatora O' sygnał powrócił do obserwatora O w chwili t_1''. Ponieważ **wynik pomiaru prędkości u oddalania się układów w obu układach musi być identyczny, ze względu na symetrię** zachodzi związek $t_1'' = At_1'$ z tą samą stałą A.

Stąd $t_1'' = A^2 t_1$, $u = \frac{s}{\tau} = \frac{\frac{1}{2}c\left(t_1''-t_1\right)}{\frac{1}{2}\left(t_1''+t_1\right)}$

$$\beta \equiv \frac{u}{c} = \frac{t_1''-t_1}{t_1''+t_1} = \frac{A^2 t_1 - t_1}{A^2 t_1 + t_1} = \frac{A^2-1}{A^2+1}$$

$$\beta A^2 + \beta = A^2 - 1 \Rightarrow A^2 = \frac{1+\beta}{1-\beta} \Rightarrow A = \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\left(1+\beta\right)$$

Otrzymaliśmy więc: $t_1' = \gamma\,(1+\beta)\,t_1$

Otrzymaliśmy więc: $t_1' = \gamma\left(1+\beta\right)t_1$

Stąd $t' - \frac{x'}{c} = A\left(t - \frac{x}{c}\right)$
czyli $ct' - x' = A\left(ct - x\right)$

Otrzymaliśmy więc: $t_1' = \gamma\left(1+\beta\right)t_1$

Stąd $t' - \frac{x'}{c} = A\left(t - \frac{x}{c}\right)$
czyli $ct' - x' = A\left(ct - x\right)$

Otrzymujemy również następującą proporcjonalność dla sygnału powracającego z punktu P: $t_2 = At_2'$.

Otrzymaliśmy więc: $t_1' = \gamma\left(1+\beta\right)t_1$

Stąd $t' - \frac{x'}{c} = A\left(t - \frac{x}{c}\right)$
czyli $ct' - x' = A\left(ct - x\right)$

Otrzymujemy również następującą proporcjonalność dla sygnału powracającego z punktu P: $t_2 = At_2'$.

Więc $t + \frac{x}{c} = A\left(t' + \frac{x'}{c}\right)$
czyli $ct' + x' = \frac{1}{A}\left(ct + x\right)$

Otrzymaliśmy więc: $t_1' = \gamma\left(1+\beta\right)t_1$

Stąd $t' - \frac{x'}{c} = A\left(t - \frac{x}{c}\right)$
czyli $ct' - x' = A\left(ct - x\right)$

Otrzymujemy również następującą proporcjonalność dla sygnału powracającego z punktu P: $t_2 = At_2'$.

Więc $t + \frac{x}{c} = A\left(t' + \frac{x'}{c}\right)$
czyli $ct' + x' = \frac{1}{A}\left(ct + x\right)$

Po odjęciu stronami końcowych równań łączących współrzędne punktu P w obu układach:
$2x' = \frac{1}{A}\left(ct+x\right) - A\left(ct-x\right) = x\left(\frac{1}{A}+A\right) + ct\left(\frac{1}{A}-A\right) = x\frac{1+A^2}{A} + ct\frac{1-A^2}{A}$
$= x\frac{1-\beta+1+\beta}{\gamma(1-\beta^2)} + ct\frac{1-\beta-1-\beta}{\gamma(1-\beta^2)} = x2\gamma - ct2\beta\gamma$
Czyli $x' = \gamma\left(x - ut\right)$

Po podstawieniu wyniku do pierwszego z równań układu:

$ct' - \gamma(x - ut) = A(ct - x)$

$ct' = \gamma(x - ut + ct - x + \beta ct - \beta x) = \gamma(ct - \beta x)$

Czyli $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$

Po podstawieniu wyniku do pierwszego z równań układu:
$ct' - \gamma(x - ut) = A(ct - x)$
$ct' = \gamma(x - ut + ct - x + \beta ct - \beta x) = \gamma(ct - \beta x)$
Czyli $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$

Aby znaleźć transformacje współrzędnych y i z wybieramy punkt Q leżący na osi y układu U, w którym ma współrzędną $y \neq 0$. Obserwator O wyznacza odległość do Q wysyłając sygnał świetlny $y = \frac{1}{2}cT$, gdzie T jest czasem, po którym wraca odbity sygnał. Czas zdarzenia Q wynosi $t = \frac{1}{2}T$.

Po podstawieniu wyniku do pierwszego z równań układu:
$ct' - \gamma(x - ut) = A(ct - x)$
$ct' = \gamma(x - ut + ct - x + \beta ct - \beta x) = \gamma(ct - \beta x)$
Czyli $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$

Aby znaleźć transformacje współrzędnych y i z wybieramy punkt Q leżący na osi y układu U, w którym ma współrzędną $y \neq 0$. Obserwator O wyznacza odległość do Q wysyłając sygnał świetlny $y = \frac{1}{2}cT$, gdzie T jest czasem, po którym wraca odbity sygnał. Czas zdarzenia Q wynosi $t = \frac{1}{2}T$.

Obserwator O' wysyła swój sygnał świetlny w takim czasie, aby sygnały od obu obserwatorów odbiły się jednocześnie. Więc musi on wysłać swój sygnał pod kątem φ względem osi x, aby $\cos\varphi = \beta$. Obserwator O' przypisuje zdarzeniu Q współrzędne: $x' = 0$, $y' = \frac{1}{2}cT'$ i $t' = \frac{1}{2}T'$.

Z tw. Pitagorasa: $\frac{1}{4}u^2 T'^2 + y'^2 = \frac{1}{4}c^2 T'^2$
$y' = \frac{cT'}{2}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{cT'}{2\gamma}$

Z tw. Pitagorasa: $\frac{1}{4}u^2 T'^2 + y'^2 = \frac{1}{4}c^2 T'^2$
$y' = \frac{cT'}{2}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{cT'}{2\gamma}$

Z transformacji czasu wynika dla $x = 0$: $T' = \gamma T$
Więc dalej $y' = \frac{c\gamma T}{2\gamma} = \frac{cT}{2} = y$

Z tw. Pitagorasa: $\frac{1}{4}u^2T'^2 + y'^2 = \frac{1}{4}c^2T'^2$
$y' = \frac{cT'}{2}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{cT'}{2\gamma}$

Z transformacji czasu wynika dla $x = 0$: $T' = \gamma T$
Więc dalej $y' = \frac{c\gamma T}{2\gamma} = \frac{cT}{2} = y$

Wyprowadziliśmy więc związek pomiędzy współrzędnymi tego samego zdarzenia P w dwóch układach współrzędnych:
$x' = \gamma(x - ut)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$.
Związek ten nazywa się **transformacją Lorentza**. Transformację odwrotną można otrzymać zamieniając znaki przy prędkości u.

Z tw. Pitagorasa: $\frac{1}{4}u^2T'^2 + y'^2 = \frac{1}{4}c^2T'^2$
$y' = \frac{cT'}{2}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{cT'}{2\gamma}$

Z transformacji czasu wynika dla $x = 0$: $T' = \gamma T$
Więc dalej $y' = \frac{c\gamma T}{2\gamma} = \frac{cT}{2} = y$

Wyprowadziliśmy więc związek pomiędzy współrzędnymi tego samego zdarzenia P w dwóch układach współrzędnych:
$x' = \gamma(x - ut)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$.
Związek ten nazywa się **transformacją Lorentza**. Transformację odwrotną można otrzymać zamieniając znaki przy prędkości u.

Dla prędkości $u \ll c$ mamy $\gamma \approx 1$ i $\beta \approx 0$, a transformacja Lorentza przechodzi w transformację Galileusza.

Wnioski z transformacji Lorentza:

Dylatacja (wydłużenie) czasu

mierzonego w układzie U, względem czasu w układzie poruszającym się. Czas mierzony w układzie, względem którego zegar spoczywa nazywa się **czasem własnym**.

Wnioski z transformacji Lorentza:

Dylatacja (wydłużenie) czasu

mierzonego w układzie U, względem czasu w układzie poruszającym się. Czas mierzony w układzie, względem którego zegar spoczywa nazywa się **czasem własnym**.

Załóżmy, że obserwator O' mierzy odstęp czasu $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ między zdarzeniami 1 i 2 zachodzącymi w początku układu U', $x'_1 = x'_2 = 0$. Obserwator O wyznacza współrzędne tych zdarzeń w swoim układzie U.

Wnioski z transformacji Lorentza:

Dylatacja (wydłużenie) czasu

mierzonego w układzie U, względem czasu w układzie poruszającym się. Czas mierzony w układzie, względem którego zegar spoczywa nazywa się **czasem własnym**.

Załóżmy, że obserwator O' mierzy odstęp czasu $\Delta t' = t_2' - t_1'$ między zdarzeniami 1 i 2 zachodzącymi w początku układu U', $x_1' = x_2' = 0$. Obserwator O wyznacza współrzędne tych zdarzeń w swoim układzie U.

Z transformacji Lorentza dla współrzędnych położenia:
$x_1' = 0 = \gamma\left(x_1 - ut_1\right)$, $x_2' = 0 = \gamma\left(x_2 - ut_2\right)$,
a dla współrzędnych czasu: $t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{u}{c^2}x_1\right)$, $t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{u}{c^2}x_2\right)$.
Stąd: $\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\left(x_2 - x_1\right)\right) = \Delta t\gamma\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \frac{\Delta t}{\gamma}$
Czyli: $\Delta t = \gamma\Delta t'$.

Skrócenie (kontrakcja) odległości

mierzonej w układzie U, względem odległości mierzonej w układzie poruszającym się.
Załóżmy, że obserwator O' mierzy odległość $\Delta l' = x_2' - x_1' = x_2'$ między początkiem swojego układu współrzędnych, i punktem P' leżącym na osi x'. Obserwator O wyznacza równocześnie $t = t_1 = t_2$ położenia tych punktów x_1, x_2 w układzie U.

Skrócenie (kontrakcja) odległości

mierzonej w układzie U, względem odległości mierzonej w układzie poruszającym się.
Załóżmy, że obserwator O' mierzy odległość $\Delta l' = x_2' - x_1' = x_2'$ między początkiem swojego układu współrzędnych, i punktem P' leżącym na osi x'. Obserwator O wyznacza równocześnie $t = t_1 = t_2$ położenia tych punktów x_1, x_2 w układzie U.

Z transformacji Lorentza: $0 = \gamma\left(x_1 - ut_1\right)$, $x_2' = \gamma\left(x_2 - ut_2\right)$
po odjęciu stronami: $\Delta l' = \gamma\left(x_2 - x_1 - u\left(t_2 - t_1\right)\right) = \gamma \Delta l$
Czyli: $\Delta l = \frac{\Delta l'}{\gamma}$

Skrócenie (kontrakcja) odległości

mierzonej w układzie U, względem odległości mierzonej w układzie poruszającym się.
Załóżmy, że obserwator O' mierzy odległość $\Delta l' = x_2' - x_1' = x_2'$ między początkiem swojego układu współrzędnych, i punktem P' leżącym na osi x'. Obserwator O wyznacza równocześnie $t = t_1 = t_2$ położenia tych punktów x_1, x_2 w układzie U.

Z transformacji Lorentza: $0 = \gamma\left(x_1 - ut_1\right)$, $x_2' = \gamma\left(x_2 - ut_2\right)$
po odjęciu stronami: $\Delta l' = \gamma\left(x_2 - x_1 - u\left(t_2 - t_1\right)\right) = \gamma \Delta l$
Czyli: $\Delta l = \frac{\Delta l'}{\gamma}$

Dla powyższych składowych czasowych transformacja Lorentza:
$t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{u}{c^2}x_1\right)$, $t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{u}{c^2}x_2\right)$,

odejmując stronami powyższe równania otrzymujemy
$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{u}{c^2} \left(x_2 - x_1 \right) \right) = \gamma \frac{u}{c^2} \Delta x$.
Pojęcie równoczesności jest względne, zależy od układu odniesienia, w którym dokonuje się obserwacji. Zdarzenia są równoczesne w obu układach tylko wtedy, gdy zachodzą w tym samym punkcie.

odejmując stronami powyższe równania otrzymujemy
$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\left(x_2 - x_1\right)\right) = \gamma\frac{u}{c^2}\Delta x$.
Pojęcie równoczesności jest względne, zależy od układu odniesienia, w którym dokonuje się obserwacji. Zdarzenia są równoczesne w obu układach tylko wtedy, gdy zachodzą w tym samym punkcie.

Transformacja prędkości

Współrzędne dwóch kolejnych pomiarów położenia i czasu dla cząstki można powiązać transformacją Lorentza:
$x' = \gamma\left(x - ut\right)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$;
$x' + dx' = \gamma\left(x + dx - u\left(t + dt\right)\right)$, $y' + dy' = y + dy$, $z' + dz' = z + dz$,
$t' + dt' = \gamma\left(t + dt - \frac{u}{c^2}\left(x + dx\right)\right)$;

odejmując stronami powyższe równania otrzymujemy
$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\left(x_2 - x_1\right)\right) = \gamma\frac{u}{c^2}\Delta x$.
Pojęcie równoczesności jest względne, zależy od układu odniesienia, w którym dokonuje się obserwacji. Zdarzenia są równoczesne w obu układach tylko wtedy, gdy zachodzą w tym samym punkcie.

Transformacja prędkości

Współrzędne dwóch kolejnych pomiarów położenia i czasu dla cząstki można powiązać transformacją Lorentza:
$x' = \gamma\left(x - ut\right)$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right)$;
$x' + dx' = \gamma\left(x + dx - u\left(t + dt\right)\right)$, $y' + dy' = y + dy$, $z' + dz' = z + dz$,
$t' + dt' = \gamma\left(t + dt - \frac{u}{c^2}\left(x + dx\right)\right)$;

odejmując stronami odpowiednie równania otrzymujemy:
$dx' = \gamma\left(dx - u\,dt\right)$, $dy' = dy$, $dz' = dz$, $dt' = \gamma\left(dt - \frac{u}{c^2}\,dx\right)$;

Odpowiednie składowe prędkości:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - u\,dt)}{\gamma\left(dt - \frac{u}{c^2}\,dx\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{u}{c^2}\,dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}v_x\right)}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma\left(dt - \frac{u}{c^2}\,dx\right)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}v_x\right)}$$

Odpowiednie składowe prędkości:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - u\,dt)}{\gamma\left(dt - \frac{u}{c^2}\,dx\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - u}{1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma\left(dt - \frac{u}{c^2}\,dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{v_y}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}v_x\right)}$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma\left(dt - \frac{u}{c^2}\,dx\right)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{v_z}{\gamma\left(1 - \frac{u}{c^2}v_x\right)}$$

Transformację odwrotną otrzymamy zamieniając odpowiednio wielkości primowane i nieprimowane oraz zastępując u przez $-u$:

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u}{c^2}v'_x}$$

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma\left(1 + \frac{u}{c^2}v'_x\right)}$$

$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma\left(1 + \frac{u}{c^2}v'_x\right)}$$

Interwał czasprzestrzenny

między zdarzeniami 1 i 2:

$$s'_{12} = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 =$$

$$c^2\gamma^2\left(\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x\right)^2 - \gamma^2\left(\Delta x - u\Delta t\right)^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 =$$

$$\gamma^2\left(c^2\Delta t^2 - 2u\Delta t\Delta x + \frac{u^2}{c^2}\Delta x^2 - \Delta x^2 + 2u\Delta x\Delta t - u^2\Delta t^2\right) - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

$$= \gamma^2\left[c^2\Delta t^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) - \Delta x^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\right] - \Delta y^2 - \Delta z^2 =$$

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = s_{12}$$

$s'_{12} = s_{12}$ – interwał jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.

W zależności od wartości interwał czasoprzestrzenny s_{12} nazywamy:

- *czasopodobnym* dla $s_{12} > 0$ – dla zdarzeń 1 i 2 można znaleźć taki układ odniesienia U', w którym oba zdarzenia następowałyby w punkcie o tych samych współrzędnych przestrzennych. Odstęp czasu wyniesie wtedy $\Delta t' = \sqrt{s'_{12}}/c$
- *zerowym* dla $s_{12} = 0$
- *przestrzeniopodobnym* dla $s_{12} < 0$ – między zdarzeniami 1 i 2 nie może być związku przyczynowego. Można jednak znaleźć taki układ, w którym zachodzą równocześnie lub w dowolnej kolejności.

Z zasady zachowania pędu i transformacji prędkości wynika, że masa jest zależna od prędkości: $m(v) = m_0\gamma$, gdzie m_0 to masa spoczynkowa.
$dW = \vec{F}\,d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt}\,d\vec{r} = \vec{v}\,d\vec{p} = \vec{v}\,d\left(m\vec{v}\right)$

Z zasady zachowania pędu i transformacji prędkości wynika, że masa jest zależna od prędkości: $m(v) = m_0\gamma$, gdzie m_0 to masa spoczynkowa.
$dW = \vec{F}\,d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt}\,d\vec{r} = \vec{v}\,d\vec{p} = \vec{v}\,d\left(m\vec{v}\right)$

$$W = \int_0^u \vec{v}\,d\left(m\vec{v}\right) = \vec{v}m\vec{v}\big|_0^u - \int_0^u m\vec{v}\,d\vec{v} = mu^2 - \int_0^u \frac{m_0\,v\,dv}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} =$$
$$mu^2 - \frac{1}{2}m_0c^2\int_0^u \frac{d\left(v^2/c^2\right)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$
$$= m_0\gamma\beta^2c^2 + m_0c^2\left(\sqrt{1-\beta^2} - 1\right) = mc^2 - m_0c^2 = \Delta mc^2 = E_K$$

Z zasady zachowania pędu i transformacji prędkości wynika, że masa jest zależna od prędkości: $m(v) = m_0\gamma$, gdzie m_0 to masa spoczynkowa.
$dW = \vec{F}\,d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt}\,d\vec{r} = \vec{v}\,d\vec{p} = \vec{v}\,d\left(m\vec{v}\right)$

$$W = \int_0^u \vec{v}\,d\left(m\vec{v}\right) = \vec{v}m\vec{v}\big|_0^u - \int_0^u m\vec{v}\,d\vec{v} = mu^2 - \int_0^u \frac{m_0\,v\,dv}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} =$$
$$mu^2 - \frac{1}{2}m_0c^2\int_0^u \frac{d\left(v^2/c^2\right)}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}$$
$$= m_0\gamma\beta^2c^2 + m_0c^2\left(\sqrt{1-\beta^2} - 1\right) = mc^2 - m_0c^2 = \Delta mc^2 = E_K$$

Energia całkowita cząstki

$E = E_K + m_0c^2 = mc^2$
Energia i masa bezwładna to dwie miary tej samej wielkości fizycznej. Stąd każdej zmianie energii całkowitej musi towarzyszyć zmiana masy bezwładnej cząstki i odwrotnie.

W granicy dla prędkości $v \ll c$:

$$E_K = \Delta mc^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots - 1 \right)$$

$$= m_0 c^2 \left(\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots \right) \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

W granicy dla prędkości $v \ll c$:

$$E_K = \Delta mc^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots - 1 \right)$$

$$= m_0 c^2 \left(\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots \right) \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Związek pomiędzy pędem, masą spoczynkową i energią całkowitą cząstki:

$$p^2 c^2 + m_0^2 c^4 = \frac{m_0^2 c^2 v^2}{1-\beta^2} + m_0^2 c^4 = \frac{m_0^2 c^2 v^2 + m_0^2 c^4 - m_0^2 c^2 v^2}{1-\beta^2} = \frac{m_0^2 c^4}{1-\beta^2} = E^2$$

W granicy dla prędkości $v \ll c$:

$$E_K = \Delta mc^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots - 1 \right)$$

$$= m_0 c^2 \left(\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \ldots \right) \approx \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Związek pomiędzy pędem, masą spoczynkową i energią całkowitą cząstki:

$$p^2 c^2 + m_0^2 c^4 = \frac{m_0^2 c^2 v^2}{1-\beta^2} + m_0^2 c^4 = \frac{m_0^2 c^2 v^2 + m_0^2 c^4 - m_0^2 c^2 v^2}{1-\beta^2} = \frac{m_0^2 c^4}{1-\beta^2} = E^2$$

Równanie ruchu w mechanice relatywistycznej:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt} = m_0 \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} m_0 \frac{d\gamma}{dt} = m_0 \gamma \vec{a} + \vec{v} m_0 \gamma^3 \beta \frac{d\beta}{dt}$$

W mechanice relatywistycznej siła $\vec{F}$ nie jest w ogólnym przypadku równoległa do przyspieszenia $\vec{a}$.

$$\frac{d(m_0\gamma)}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{d\left(m_0c^2\gamma\right)}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{dE}{dt} = \frac{1}{c^2}\vec{F}\vec{v}$$

W mechanice relatywistycznej siła $\vec{F}$ nie jest w ogólnym przypadku równoległa do przyspieszenia $\vec{a}$.

$$\frac{d(m_0\gamma)}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{d\left(m_0c^2\gamma\right)}{dt} = \frac{1}{c^2}\frac{dE}{dt} = \frac{1}{c^2}\vec{F}\vec{v}$$

Z poprzedniego wzoru: $m_0\gamma\vec{a} + \frac{\vec{v}}{c^2}\left(\vec{F}\vec{v}\right) = \vec{F}$

stąd: $\vec{a} = \frac{1}{m_0\gamma}\left[\vec{F} - \frac{\vec{v}}{c^2}\left(\vec{F}\vec{v}\right)\right]$

Ogólna teoria względności

Masa ważka i bezwładna

Masa bezwładna (inercjalna) m_b jako miara bezwładności, występuje w drugiej zasadzie dynamiki Newtona $\vec{F} = m_b\vec{a}$.
Masa grawitacyjna m_g charakteryzująca źródła i obiekty oddziaływania grawitacyjnego, występuje w prawie powszechnego ciążenia $F = G\frac{M_g m_g}{r^2}$.

Ogólna teoria względności

Masa ważka i bezwładna

Masa bezwładna (inercjalna) m_b jako miara bezwładności, występuje w drugiej zasadzie dynamiki Newtona $\vec{F} = m_b\vec{a}$.
Masa grawitacyjna m_g charakteryzująca źródła i obiekty oddziaływania grawitacyjnego, występuje w prawie powszechnego ciążenia $F = G\frac{M_g m_g}{r^2}$.

Przyspieszenie swobodnego spadku ciała wynosi $g = \frac{F}{m_b} = G\frac{M_g}{r^2}\frac{m_g}{m_b}$.

Literatura

- Marta Skorko, Fizyka, PWN (1982).
- Andrzej Januszajtis, Fizyka dla Politechnik, t. 1 Cząstki, PWN (1977).
- Andrzej Januszajtis, Fizyka dla Politechnik, t. 2 Pola, PWN (1982).
- Barbara Oleś, Wykłady z Fizyki, Wydawnictwo PK (2005).
- Bohdan Kozarzewski, Fizyka zjawisk mikroskopowych, Wydawnictwo PK (1998).
- A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki t.1, PWN (1984).
- Encyklopedia fizyki współczesnej, PWN (1983).
- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki t.1, PWN (2006).