1. Promieniowanie Ciała Doskonale Czarnego
2. Efekt Fotoelektryczny
3. Efekt Comptona
4. Promienie Röntgena
5. Zjawiska kwantowe
6. Literatura

Promieniowanie Ciała Doskonale Czarnego

Energia fotonu

$E = h\nu$, gdzie $h = 6.626 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$ to stała Plancka, a ν częstotliwość promieniowania elektromagnetycznego.

Promieniowanie Ciała Doskonale Czarnego

Energia fotonu

$E = h\nu$, gdzie $h = 6.626 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$ to stała Plancka, a ν częstotliwość promieniowania elektromagnetycznego.

Ciało doskonale czarne

Ciała doskonale czarne to ciała, których powierzchnie całkowicie pochłaniają padające na nie promieniowanie.
Max Planck przedstawił model ciała doskonale czarnego jako zbiór oscylatorów posiadających skwantowane energie: $E = nh\nu$, gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots$ to **liczba kwantowa**.

Widmo promieniowania termicznego ciała

Widmo promieniowania termicznego ciała to zależność mocy promieniowania od jego długości fali.

Widmo promieniowania termicznego ciała

Widmo promieniowania termicznego ciała to zależność mocy promieniowania od jego długości fali.

Moc I emitowana przez jednostkową powierzchnię o temperaturze T w przedziale długości fal $\langle \lambda; \lambda + d\lambda \rangle$ jest proporcjonalna do liczby oscylatorów o częstotliwości $\nu = \frac{c}{\lambda}$ i średniej energii wypromiewniowywanej przez oscylator: $I(\lambda) \sim N(\lambda) E_r$.
Stąd: $I(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$, gdzie: k_B to stała Boltzmanna.

Aby znaleźć długość fali $\lambda_{\max}$ odpowiadającej maksymalnej mocy promieniowania obliczamy pochodną:

$$I'(\lambda) = 8\pi hc\left[-\frac{5}{\lambda^6}\frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T}-1} + \frac{1}{\lambda^5}\frac{\frac{hc}{\lambda^2 k_B T}e^{hc/\lambda k_B T}}{\left(e^{hc/\lambda k_B T}-1\right)^2}\right] = 0$$

$$\frac{hc}{\lambda k_B T}e^{hc/\lambda k_B T} = 5\left(e^{hc/\lambda k_B T}-1\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{5}\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)e^{hc/\lambda k_B T} = 1$$

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T} \Rightarrow \left(1-\frac{x}{5}\right)e^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x \approx 4.965$$

Aby znaleźć długość fali $\lambda_{\max}$ odpowiadającej maksymalnej mocy promieniowania obliczamy pochodną:

$$I'(\lambda) = 8\pi hc\left[-\frac{5}{\lambda^6}\frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T}-1} + \frac{1}{\lambda^5}\frac{\frac{hc}{\lambda^2 k_B T}e^{hc/\lambda k_B T}}{\left(e^{hc/\lambda k_B T}-1\right)^2}\right] = 0$$

$$\frac{hc}{\lambda k_B T}e^{hc/\lambda k_B T} = 5\left(e^{hc/\lambda k_B T}-1\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{5}\frac{hc}{\lambda k_B T}\right)e^{hc/\lambda k_B T} = 1$$

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T} \Rightarrow \left(1-\frac{x}{5}\right)e^x = 1 \quad \Rightarrow \quad x \approx 4.965$$

Prawo przesunięć Wiena

Największa ilość energii emitowanej przez ciało doskonale czarne przypada na fotony o długości fali:

$\lambda_{\max} = \frac{hc}{4.965 k_B T}$

Całkowita moc wypromieniowywana - Prawo Stefana-Boltzmanna

$$R = 8\pi hc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} = \ldots = \frac{8\pi \left(\pi k_B T\right)^4}{15 h^3 c^2} = \sigma T^4$$

$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ – stała Stefana-Boltzmanna

Efekt Fotoelektryczny

Teoria Plancka dotycząca ciała doskonale czarnego doprowadziła Einsteina do wniosku, że światło można traktować jako strumień cząstek – **fotonów**, z których każda niesie określoną porcję (**kwant**) energii $E = h\nu$.
W zjawisku fotoelektrycznym jeden foton jest całkowicie absorbowany przez jeden elektron, który dzięki temu może uzyskać maksymalną energię kinetyczną: $E_K = h\nu - W$, gdzie W to praca wyjścia równa energii potrzebnej do uwolnienia elektronu z metalu.

Efekt Comptona

W swoim doświadczeniu Compton kierował wiązkę promieni X o określonej długości na tarczę grafitową, a następnie mierzył natężenie rozproszonego promieniowania w funkcji λ dla różnych kątów rozpraszania. Dla niezerowych kątów rozkład natężenia promieniowania ma dwa maksima: jedno odpowiadające długości fali padającej λ, drugie – fali dłuższej o **przesunięcie komptonowskie** $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$.

Efekt Comptona

W swoim doświadczeniu Compton kierował wiązkę promieni X o określonej długości na tarczę grafitową, a następnie mierzył natężenie rozproszonego promieniowania w funkcji λ dla różnych kątów rozpraszania. Dla niezerowych kątów rozkład natężenia promieniowania ma dwa maksima: jedno odpowiadające długości fali padającej λ, drugie – fali dłuższej o **przesunięcie komptonowskie** $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$.

$$
\begin{aligned}
E_f + E_e &= E'_f + E'_e \\
E'_e &= E_f + E_e - E'_f \\
\vec{p}_f &= \vec{p'}_f + \vec{p'}_e \\
\vec{p'}_e^{\,2} &= \vec{p}_f^{\,2} - 2\vec{p}_f \cdot \vec{p'}_f + \vec{p'}_f^{\,2} \\
p_e'^2 &= p_f^2 - 2p_f p'_f \cos\theta + p_f'^2, \qquad E_f = p_f c \\
p_e'^2 c^2 &= E_f^2 - 2E_f E'_f \cos\theta + E_f'^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_e'^2 c^2 + E_e^2 &= E_e'^2 \\
E_f^2 - 2E_f E_f' \cos\theta + E_f'^2 + E_e^2 &= E_f^2 + E_f'^2 + E_e^2 - 2E_f E_f' + 2E_e E_f - 2E_e E_f' \\
E_e E_f' + E_f E_f' (1 - \cos\theta) &= E_e E_f \\
\frac{m_e c^2}{\lambda'} + \frac{hc}{\lambda\lambda'} (1 - \cos\theta) &= \frac{m_e c^2}{\lambda} \\
\lambda + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos\theta) &= \lambda'
\end{aligned}
$$

Wyprowadzając powyższy wzór elektron traktowany jest jak cząstka swobodna. Jeśli foton rozprasza się na elektronie silnie związanym lub jego energia jest mała, to prawdopodobnie elektron nie zostanie uwolniony i traktujemy ten proces jako zderzenie fotonu z całym atomem. Wtedy długość fali fotonu praktycznie nie ulega zmianie, ze względu na dużo większą masę atomu w porównaniu z masą elektronu. Nazywa się to **rozpraszaniem Thomsona** i w zakresie promieniowania widzialnego i mikrofalowego jest dominujące. Rozpraszanie Comptona dominuje dla fal krótszych.

Promienie Röntgena

Początkowo promienie Röntgena były wytwarzane w tzw. lampach rentgenowskich jonowych. W bańce próżniowej (ciśnienie około 0.1 Pa) znajduje się katoda w postaci wklęsłej blaszki, np. z glinu, anoda i antykatoda w postaci płytki z trudno topliwego metalu, np. wolframu lub platyny. Antykatoda umieszczona jest w środku bańki i ma ten sam potencjał co anoda. Wiązka elektronów wybiegająca z katody skupia się na powierzchni antykatody.

Promienie Röntgena

Początkowo promienie Röntgena były wytwarzane w tzw. lampach rentgenowskich jonowych. W bańce próżniowej (ciśnienie około $0.1\,Pa$) znajduje się katoda w postaci wklęsłej blaszki, np. z glinu, anoda i antykatoda w postaci płytki z trudno topliwego metalu, np. wolframu lub platyny. Antykatoda umieszczona jest w środku bańki i ma ten sam potencjał co anoda. Wiązka elektronów wybiegająca z katody skupia się na powierzchni antykatody.

W technice stosowane są lampy niskonapięciowe ($30 - 80\,kV$) i wysokonapięciowe do $250\,kV$. W medycynie lampy pracują pod napięciem około $60\,kV$ przy natężeniu prądu $5 - 400\,mA$.

Przenikliwość promieni Röntgena zależy od napięcia, przy którym pracuje lampa i od rodzaju materii pochłaniającej (czynnikiem decydującym jest liczba atomowa pierwiastka). Zmiana natężenia wiązki po przejściu przez warstwę absorbującą jest proporcjonalna do natężenia przed przejściem I_0 oraz do grubości warstwy dx. Współczynnik proporcjonalności μ to **liniowy współczynnik absorpcji**:
$-dI = \mu I\, dx \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\mu\, dx \Rightarrow \ln I = -\mu x + C \Rightarrow I = C' e^{-\mu x} = I_0 e^{-\mu x}$.

Przenikliwość promieni Röntgena zależy od napięcia, przy którym pracuje lampa i od rodzaju materii pochłaniającej (czynnikiem decydującym jest liczba atomowa pierwiastka). Zmiana natężenia wiązki po przejściu przez warstwę absorbującą jest proporcjonalna do natężenia przed przejściem I_0 oraz do grubości warstwy dx. Współczynnik proporcjonalności μ to **liniowy współczynnik absorpcji**:
$-dI = \mu I\, dx \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\mu\, dx \Rightarrow \ln I = -\mu x + C \Rightarrow I = C' e^{-\mu x} = I_0 e^{-\mu x}$.

Braggowie rozpatrywali wyniki interferencji promieni Röntgena rozproszonych na powierzchniowych warstwach kryształu. Wzmocnienie interferencyjne promieni Röntgena występuje gdy: $n\lambda = 2d \sin\theta$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, gdzie d jest odległością warstw atomowych kryształu (stała siatki krystalicznej około $10^{-10}\, m$), θ to kąt odbłysku. Dla wzmocnienia różnica dróg optycznych: $n\lambda = x_2 - x_1 = \frac{d}{\sin\theta}(1 - \cos 2\theta) = 2d \sin\theta$.

Zjawiska kwantowe

Dualizm korpuskularno-falowy

Z każdą cząstką o pędzie $\vec{p}$ i energii E związana jest fala materii. Długość tej fali de Broglie'a, stowarzyszonej z poruszającą się cząstką wynosi $\lambda = \frac{h}{p}$, a jej częstotliwość $\nu = \frac{E}{h}$. Falową naturę cząstki obserwuje się gdy długość fali de Broglie'a jest większa od jej rozmiarów, stąd przedmioty widoczne gołym okiem nie wykazują własności falowych.

Zjawiska kwantowe

Dualizm korpuskularno-falowy

Z każdą cząstką o pędzie $\vec{p}$ i energii E związana jest fala materii. Długość tej fali de Broglie'a, stowarzyszonej z poruszającą się cząstką wynosi $\lambda = \frac{h}{p}$, a jej częstotliwość $\nu = \frac{E}{h}$. Falową naturę cząstki obserwuje się gdy długość fali de Broglie'a jest większa od jej rozmiarów, stąd przedmioty widoczne gołym okiem nie wykazują własności falowych.

Mikroskop elektronowy

Obrazy uzyskane w wyniku dyfrakcji elektronów i neutronów na kryształach bardzo przypominają wyniki dyfrakcji promieni X na kryształach. Zdolność rozdzielcza mikroskopów elektronowych jest od 10 do 100 razy lepsza niż optycznych.

Zasada nieokreśloności Heisenberga

Pary wielkości fizycznych takie jak położenie i pęd, czas i energia, kąt obrotu i moment pędu spełniają **zasadę nieokreśloności Heisenberga**, tzn. ich pomiary obciążone są niepewnościami spełniającymi nierówności: $\Delta x \Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2}$, $\Delta E \Delta t \geqslant \frac{\hbar}{2}$, $\Delta \varphi \Delta L \geqslant \frac{\hbar}{2}$, gdzie $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

Zasada nieokreśloności Heisenberga

Pary wielkości fizycznych takie jak położenie i pęd, czas i energia, kąt obrotu i moment pędu spełniają **zasadę nieokreśloności Heisenberga**, tzn. ich pomiary obciążone są niepewnościami spełniającymi nierówności: $\Delta x \Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2}$, $\Delta E \Delta t \geqslant \frac{\hbar}{2}$, $\Delta \varphi \Delta L \geqslant \frac{\hbar}{2}$, gdzie $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

Funkcja falowa cząstki

Cząstkom ze względu na ich cechy falowe przypisuje się funkcję falową $\Psi(x,t)$ zawierającą wszystkie dostępne o niej informacje. $\rho = |\Psi(x,t)|^2$ jest to gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w punkcie o współrzędnych (x,t).

operator pędu: $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$,
operator energii: $\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$,
gęstość prądu prawdopodobieństwa: $\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^* \vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right)$
Wartość średnia operatora $f\left(\vec{r},\vec{p}\right)$ dana jest wzorem:
$\bar{f} = \int \Psi^*\left(\vec{r},\vec{p}\right) f\left(\vec{r},\vec{p}\right) \Psi\left(\vec{r},\vec{p}\right)\, dv$.
Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w obszarze, gdzie znajduje się na pewno:
$\int \left|\Psi\left(x,t\right)\right|^2\, dx = 1$.

operator pędu: $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$,
operator energii: $\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$,
gęstość prądu prawdopodobieństwa: $\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left(\Psi^* \vec{\nabla}\Psi - \Psi\vec{\nabla}\Psi^*\right)$
Wartość średnia operatora $f\left(\vec{r},\vec{p}\right)$ dana jest wzorem:
$\bar{f} = \int \Psi^*\left(\vec{r},\vec{p}\right) f\left(\vec{r},\vec{p}\right) \Psi\left(\vec{r},\vec{p}\right)\, dv$.
Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w obszarze, gdzie znajduje się na pewno:
$\int \left|\Psi\left(x,t\right)\right|^2\, dx = 1$.

Równanie Schrödingera niezależne od czasu: $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$, daje informacje o energiach i funkcjach falowych stanów stacjonarnych układu.

Przykład cząstki swobodnej (nie działają żadne siły, $V = 0$) w jednym wymiarze: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi$
równanie posiada dwa niezależne rozwiązania: $\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$.

Przykład cząstki swobodnej (nie działają żadne siły, $V = 0$) w jednym wymiarze: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} = E\Psi$
równanie posiada dwa niezależne rozwiązania: $\Psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$.

Po podstawieniu do równania Schrödingera otrzymujemy energię cząstki: $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E$.
Stąd długość wektora falowego $k = \sqrt{2mE}/\hbar$.
Funkcja Ae^{ikx} opisuje falę biegnącą w kierunku dodatnim,
a Be^{-ikx} w kierunku ujemnym osi x.

Przykład cząstki w nieskończonej studni potencjału odzwierciedla sytuację protonów i neutronów w jądrze atomowym lub elektronów w kawałku metalu. Przy zbliżaniu się do granicy jądra lub powierzchni metalu energia potencjalna cząstki gwałtownie rośnie.

Energia potencjalna $V(x) = \begin{cases} \infty \text{ dla } x \leqslant 0 \text{ i } x \geqslant a \\ 0 \text{ dla } 0 < x < a \end{cases}$.

$$
\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi &= E\Psi \Rightarrow \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\Psi = 0 \\
\frac{2mE}{\hbar^2} &= k^2 \\
\Psi(x) &= A\sin(kx) + B\cos(kx) \\
\Psi(0) &= 0 \Rightarrow B = 0 \\
\Psi(a) &= 0 \Rightarrow \sin(ka) = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{a} \\
E_n &= \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n}{a}\right)^2 \\
\Psi_n(x) &= A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^a |\Psi(x)|^2\, dx = 1
$$

$$\int_0^a \sin^2(kx)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^a (\cos(2kx) - 1)\,dx$$

$$= -\frac{1}{4k}\sin(2kx) + \frac{x}{2}\Big|_0^a = \frac{a}{2}$$

$$\int_0^a |\Psi(x)|^2\,dx = A^2\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

Literatura

- Marta Skorko, Fizyka, PWN (1982).
- Andrzej Januszajtis, Fizyka dla Politechnik, t. 1 Cząstki, PWN (1977).
- Andrzej Januszajtis, Fizyka dla Politechnik, t. 2 Pola, PWN (1982).
- Barbara Oleś, Wykłady z Fizyki, Wydawnictwo PK (2005).
- Bohdan Kozarzewski, Fizyka zjawisk mikroskopowych, Wydawnictwo PK (1998).
- A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki t.1, PWN (1984).
- Encyklopedia fizyki współczesnej, PWN (1983).
- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki t.1, PWN (2006).